# 2024全国高中数学竞赛专题-三角函数

来源：网络 作者：落花成痕 更新时间：2024-09-30

*全国高中数学竞赛专题-三角函数三角恒等式与三角不等式一、基础知识定义1角：一条射线绕着它的端点旋转得到的图形叫做角。角的大小是任意的。若旋转方向为逆时针方向，则角为正角，若旋转方向为顺时针方向，则角为负角，若不旋转则为零角。定义2角度制：把...*

全国高中数学竞赛专题-三角函数

三角恒等式与三角不等式

一、基础知识

定义1

角：一条射线绕着它的端点旋转得到的图形叫做角。角的大小是任意的。

若旋转方向为逆时针方向，则角为正角，若旋转方向为顺时针方向，则角为负角，若不旋转则为零角。

定义2

角度制：把一周角360等分，每一等分为一度。

弧度制：把等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做一弧度。360度=2π弧度。

若圆心角的弧长为L，则其弧度数的绝对值|α|=

r

L,其中r

是圆的半径。

定义3

三角函数：在直角坐标平面内，把角α的顶点放在原点，始边与x

轴的正半轴重合，在角的终边上任意取

一个不同于原点的点P，设它的坐标为（x,y），到原点的距离为r,则正弦函数s

in

α=r

y,余弦函数co

s

α=r

x,正切函数tan

α=

x

y，余切函数cot

α=y

x，正割函数se

c

α=x

r,余割函数c

s

c

α=.y

r

定理1

同角三角函数的基本关系式，倒数关系：tan

α=αcot

1,s

in

α=αcsc

1，co

s

α=αsec

1；

商数关系：tan

α=α

α

αααsin

cos

cot,cos

sin

=；

乘积关系：tan

α×co

s

α=s

in

α,cot

α×s

in

α=co

s

α；

平方关系：s

in

2α+co

s

2α=1,tan

2α+1=se

c

2α,cot

2α+1=c

s

c

2α.定理2

诱导公式（Ⅰ）s

in

(α+π)=-s

in

α,co

s(π+α)=-co

s

α,tan

(π+α)=tan

α,cot

(π+α)=cot

α;

（Ⅱ）s

in

(-α)=-s

in

α,co

s(-α)=co

s

α,tan

(-α)=-tan

α,cot

(-α)=cot

α;

（Ⅲ）s

in

(π-α)=s

in

α,co

s(π-α)=-co

s

α,tan

=(π-α)=-tan

α,cot

(π-α)=-cot

α;

（Ⅳ）s

in

???

??-απ2=co

s

α,co

s

???

??-απ2=s

in

α,tan

???

??-απ2=cot

α（奇变偶不变，符号看象限）。

定理3

正弦函数的性质，根据图象可得y

=s

inx

（x

∈R）的性质如下。

单调区间：在区间??

?

??

?+

22,2

2πππ

πk

k

上为增函数，在区间??

?

??

?++

πππ

π232,22k

k

上为减函数，最小正周期：2π.奇偶性：奇函数

有界性：当且仅当x

=2kx

+2π时，y

取最大值1，当且仅当x

=3k

π-2

π

时,y

取最小值-1，值域为[-1，1]。

对称性：直线x

=k

π+

π

均为其对称轴，点（k

π,0）均为其对称中心。这里k

∈Z

.定理4

余弦函数的性质，根据图象可得y

=co

s

x

(x

∈R)的性质。

单调区间：在区间[2k

π,2k

π+π]上单调递减，在区间[2k

π-π,2k

π]上单调递增。

最小正周期：2π。

奇偶性：偶函数。

有界性：当且仅当x

=2k

π时，y

取最大值1；当且仅当x

=2k

π-π时，y

取最小值-1。值域为[-1，1]。

对称性：直线x

=k

π均为其对称轴，点??

?

?

?+

0,2π

πk

均为其对称中心。这里k

∈Z

.定理5

正切函数的性质：由图象知奇函数y

=tanx

(x

≠k

π+

2π)在开区间(k

π-2π,k

π+2

π)上为增函数,最小正周期为π，值域为（-∞，+∞），点（k

π，0），（k

π+2

π，0）均为其对称中心。

定理6

两角和与差的基本关系式：co

s(α±β)=co

s

αco

s

β

s

in

αs

in

β,s

in

(α±β)=s

in

αco

s

β±co

s

αs

in

β;

tan

(α±β)=

.)

tan

tan

1()

tan

(tan

βαβα

±

两角和与差的变式：2222

sin

sin

cos

cos

sin()sin()αββααβαβ-=-=+-

2222

cos

sin

cos

sin

cos()cos()αββααβαβ-=-=+-

三角和的正切公式：tan

tan

tan

tan

tan

tan

tan()1tan

tan

tan

tan

tan

tan

αβγαβγ

αβγαββγγα

++-++=

---

定理7

和差化积与积化和差公式:

s

in

α+s

in

β=2s

in

???

??+2βαco

s

???

??-2βα,s

in

α-s

in

β=2s

in

???

??+2βαco

s

???

??-2βα,co

s

α+co

s

β=2co

s

???

??+2βαco

s

???

??-2βα,co

s

α-co

s

β=-2s

in

???

??+2βαs

in

???

??-2βα,s

in

αco

s

β=21[s

in

(α+β)+s

in

(α-β)],co

s

αs

in

β=21

[s

in

(α+β)-s

in

(α-β)],co

s

αco

s

β=21[co

s(α+β)+co

s(α-β)],s

in

αs

in

β=-2

[co

s(α+β)-co

s(α-β)].定理8

二倍角公式：s

in

2α=2s

in

αco

s

α,co

s2α=co

s

2α-s

in

2α=2co

s

2α-1=1-2s

in

2α,tan

2α=

.)

tan

1(tan

22αα

三倍角公式及变式：3

sin

33sin

4sin

ααα=-，3

cos34cos

3cos

ααα=-

1s

i

n

(60)s

i

n

s

i

n

(60)s

i

n

34α

ααα-+=，1

cos(60)cos

cos(60)cos34

αααα-+=

定理9

半角公式:

s

in

2α=2)cos

1(α-±,co

s

α

=2)cos

1(α+±,tan

2α=)cos

1()

cos

1(αα+-±=

.sin)cos

1()

cos

1(sin

αααα-=+

定理10

万能公式:

?

?

?

??+?

??

??=

2tan

12tan

2sin

2ααα,???

??+???

??-=2tan

12tan

1cos

22ααα,.2tan

12tan

2tan

2???

??-???

??=ααα

定理11

辅助角公式：如果a,b

是实数且a

2+b

2≠0，则取始边在x

轴正半轴，终边经过点(a,b)的一个角为β，则s

in

β=22b

a

b

+,co

s

β=2

2b

a

a

+，对任意的角α.a

s

in

α+bco

s

α=)(22b

a

+s

in

(α+β).定理12

正弦定理：在任意△ABC

中有R

C

c

B

b

A

a

2sin

sin

sin

===，其中a,b,c

分别是角A，B，C的对边，R

为△ABC

外接圆半径。

定理13

余弦定理：在任意△ABC

中有a

2=b

2+c

2-2bco

s

A，其中a,b,c

分别是角A，B，C的对边。

定理14

射影定理：在任意△ABC

中有cos

cos

a

b

C

c

B

=+，cos

cos

b

a

C

c

A

=+，cos

cos

c

a

B

b

A

=+

定理15

欧拉定理：在任意△ABC

中，2

2OI

R

Rr

=-，其中O,I

分别为△ABC的外心和内心。

定理16

面积公式：在任意△ABC

中，外接圆半径为R,内切圆半径为r，半周长2

a

b

c

p

++=

则211sin

2sin

sin

sin

(sin

sin

sin)224a

abc

S

ah

ab

C

rp

R

A

B

C

rR

A

B

C

R

=

=====++

222

1)(c

o

t

c

o

t

c

o

t)4

c

a

A

b

B

c

C

==++

定理17

与△ABC

三个内角有关的公式：

（1）sin

sin

sin

4cos

cos

cos

;222

A

B

C

A

B

C

++=

（2）cos

cos

cos

14sin

sin

sin

;222

A

B

C

A

B

C

++=+

（3）tan

tan

tan

tan

tan

tan

;A

B

C

A

B

C

++=

（4）tan

tan

tan

tan

tan

tan

1;222222

A

B

B

C

C

A

++=

（5）cot

cot

cot

cot

cot

cot

1;A

B

B

C

C

A

++=

（6）sin

2sin

2sin

24sin

sin

sin

.A

B

C

A

B

C

++=

定理18

图象之间的关系：y

=s

inx的图象经上下平移得y

=s

inx

+k的图象；经左右平移得y

=s

in

(x

+?)的图象（相位

变换）；纵坐标不变，横坐标变为原来的ω

1，得到y

=s

in

x

ω(0>ω)的图象（周期变换）；横坐标不变，纵坐标变为原来的A

倍，得到y

=A

s

inx的图象（振幅变换）；y

=A

s

in

(ωx

+?)(ω>0)的图象（周期变换）；横坐标不变，纵坐标变为原来的A

倍，得到y

=A

s

inx的图象（振幅变换）；y

=A

s

in

(ωx

+?)(ω,?>0)(|A

|

叫作振幅)的图象向右平移ω

?

个单位得到y

=A

s

in

ωx的图象。

定义4

函数y

=s

inx

?

?

???-∈2,2ππx的反函数叫反正弦函数，记作y

=a

r

c

s

inx

(x

∈[-1,1])，函数y

=co

s

x

(x

∈[0,π])的反函数叫反余弦函数，记作y

=a

r

cco

s

x

(x

∈[-1,1]).函数y

=tanx

?

??

?

?-

∈2,2ππx的反函数叫反正切函数。记作y

=a

r

ctanx

(x

∈[-∞,+∞]).函数y

=co

t

x

(x

∈[0,π])的反函数称为反余切函数，记作y

=a

r

ccotx

(x

∈[-∞,+∞]).定理19

三角方程的解集，如果a

∈(-1,1)，方程s

inx

=a的解集是{x

|x

=n

π+(-1)n

a

r

c

s

ina,n

∈Z

}。

方程co

s

x

=a的解集是{x

|x

=2kx

±a

r

cco

s

a,k

∈Z

}.如果a

∈R，方程tanx

=a的解集是{x

|x

=k

π+a

r

ctana,k

∈Z

}。

恒等式：a

r

c

s

ina

+a

r

cco

s

a

=

2π；a

r

ctana

+a

r

ccota

=2

π.定理20

若干有用的不等式：

（1）若???

?

?∈2,0πx，则s

inx

（2）函数sin

x

y

x

=在(0,)π上为减函数；函数tan

x

y

x

=在(0,)2

π

上为增函数。

（3）嵌入不等式：设A+B+C=π，则对任意的x,y,z

∈R，有2

2cos

2cos

2cos

x

y

z

yz

A

xz

B

xy

C

++≥++

等号成立当且仅当yzsinA=zxsinB=xysinC.二、方法与例题

1．结合图象解题。

例1

求方程s

inx

=lg

|x

|的解的个数。

【解】在同一坐标系内画出函数y

=s

inx

与y

=lg

|x

|的图象，由图象可知两者有6个交点，故方程有6个解。

2．三角函数性质的应用。

例2

设x

∈(0,π),试比较co

s(s

inx)与s

in

(co

s

x)的大小。

【解】

若??

?

?

??∈ππ,2x，则-1所以s

in

(co

s

x)

≤0,又02x

π?

?

∈

??

?，则因为s

inx

+co

s

x

=2s

in

(x

+

4π)≤2π，所以co

s(s

inx)>co

s（2

π

-co

s

x)=s

in

(co

s

x).综上，当x

∈(0,π)时，总有co

s(s

inx)3．最小正周期的确定。

例3

求函数y

=s

in

(2co

s|x

|)的最小正周期。

【解】

因为co

s(-x)=co

s

x，所以cos

|x

|=co

s

x,所以T

=2π是函数的周期；

4．三角最值问题。

例4

已知函数y

=s

inx

+x

2cos

1+，求函数的最大值与最小值。

【解法一】

令s

inx

=???

??≤≤=

+ππ

θθ4304

sin

2cos

1,cos

x,则有y

=).4

sin(2sin

2cos

2π

θθθ+

=+

因为

ππ

4304≤≤，所以ππθπ≤+≤42，所以)4

sin(0π

θ+≤≤1，所以当πθ43=，即x

=2k

π-2π(k

∈Z)时，y

m

in

=0，当4πθ=，即x

=2k

π+2

π

(k

∈Z)时，y

m

ax

=2.【解法二】

因为y

=s

inx

+)cos

1(sin

2cos

1222

x

x

x

++≤

+=2（因为(a

+b)2≤2(a

2+b

2)），且|s

inx|≤1≤x

2cos

1+，所以0≤s

inx

+x

2cos

1+≤2，所以当x

2cos

1+=s

inx，即x

=2k

π+2

π

(k

∈Z)时,y

m

ax

=2，当x

2cos

1+=-s

inx，即x

=2k

π-2

π

(k

∈Z)时,y

m

in

=0。

5．换元法的使用。

例5

求x

x

x

x

y

cos

sin

1cos

sin

++=的值域。

【解】

设t

=s

inx

+co

s

x

=).4sin(2cos

22sin

222π+=???

?

??+x

x

x

因为,1)4

sin(1≤+

≤-π

x

所以.22≤≤-t

又因为t

=1+2s

inxco

s

x,所以s

inxco

s

x

=212-t，所以2

1121

2-=+-=t

t

x

y，所以

.212212-≤≤--y

因为t

≠-1，所以121-≠-t，所以y

≠-1.所以函数值域为.212,11,212??

?

??--???-+-∈

y

6．图象变换：y

=s

inx

(x

∈R)与y

=A

s

in

(ωx

+?)(A,ω,?>0).例6

已知f

(x)=s

in

(ωx

+?)(ω>0,0≤?≤π)是R

上的偶函数，其图象关于点???

??0,43πM

对称，且在区间??

?

???2,0π上是单调函数，求?和ω的值。

【解】

由f

(x)是偶函数，所以f

(-x)=f

(x)，所以s

in

(ωx+?)=s

in

(-ωx

+?)，所以co

s

?s

inx

=0，对任意x

∈R

成立。又0≤?≤π，解得?=2

π，因为f

(x)图象关于??

?

??0,43πM

对称，所以)43()43(x

f

x

f

++-ππ=0。

取x

=0，得)4

3(πf

=0，所以sin

.024

3=???

??+πωπ

所以243ππωπ+=k

(k

∈Z)，即ω=32(2k

+1)

(k

∈Z).又ω>0，取k

=0时，此时f

(x)=sin

(2x

+

2π)在[0，2

π

]上是减函数；

取k

=1时，ω=2，此时f

(x)=sin

(2x

+2π)在[0，2

π

]上是减函数；

取k

=2时，ω≥310，此时f

(x)=sin

(ωx

+2π)在[0，2

π

]上不是单调函数，综上，ω=3

或2。

7．三角公式的应用。

例7

已知sin

(α-β)=

135，sin

(α+β)=-

135，且α-β∈???

??ππ,2，α+β∈??

?

??ππ2,23，求sin

2α,cos

2β的值。

【解】

因为α-β∈??

?

??ππ,2，所以cos

(α-β)=-.1312)(sin

-=--βα

又因为α+β∈??

?

??ππ2,23，所以cos

(α+β)=.1312)(sin

12=+-βα

所以sin

2α=sin

[(α+β)+(α-β)]=sin

(α+β)cos

(α-β)+cos

(α+β)sin

(α-β)=169

120,cos

2β=cos

[(α+β)-(α-β)]=cos

(α+β)cos

(α-β)+sin

(α+β)sin

(α-β)=-1.例8

已知△ABC的三个内角A，B，C

成等差数列，且B

C

A

cos

2cos

1cos

1-=+，试求2

cos

C

A

-的值。

【解】

因为A

=1200-C，所以cos

C

A

-=cos

(600-C)，又由于)

120cos(cos

cos)120cos(cos

1)120cos(1cos

1cos

00C

C

C

C

C

C

C

A

-+-=+-=+

=

222

1)2120cos()

60cos(2)]2120cos(120[cos

21)60cos(60cos

2000000-=---=-+-C

C

C

C，所以232

cos

22cos

242--+-C

A

C

A

=0。解得222cos

=-C

A

或8232cos

-=-C

A。

又2

cos

C

A

->0，所以222cos

=-C

A。

例9

求证：tan

20?+4cos

70?

【解】

tan

20?+4cos

70?=??20cos

20sin

+4sin

20?

?

??+=+=20cos

40sin

220sin

20cos

20cos

20sin

420sin

?

???+=++=20

cos

40sin

10cos

30sin

220cos

40sin

40sin

20sin

.320cos

20cos

60sin

220cos

40sin

80sin

==+=?

?

例10

证明：7

cos77cos521cos335cos

64cos

x

x

x

x

x

+++=

分析：等号左边涉及角7x、5x、3x、x

右边仅涉及角x，可将左边各项逐步转化为x

sin、x

cos的表达式，但相对较繁.观察到右边的次数较高，可尝试降次.证明：因为,cos

33cos

cos

4,cos

3cos

43cos

x

x

x

x

x

x

+=-=所以

从而有x

x

x

x

x

226cos

9cos

3cos

63cos

cos

16++=

=)2cos

1(2

9)2cos

4(cos

326cos

1x

x

x

x

+++++

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

cos

20cos

2cos

30cos

4cos

12cos

6cos

2cos

64,2cos

992cos

64cos

66cos

1cos

327

6+++=+++++=

.cos

353cos

215cos

77cos

cos

20cos

153cos

153cos

65cos

65cos

7cos

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

+++=++++++=

评述：本题看似“化简为繁”，实质上抓住了降次这一关键，很是简捷.另本题也可利用复数求解.令

77)1

(cos

128，1cos

2,sin

cos

z

z

z

z

i

z

+=+=+=αααα从而则，展开即可.例11

已知.20012tan

2sec

:,2001tan

1tan

1=+=-+αααα求证

证明：)4tan()22

sin()22cos(12cos

2sin

12tan

2sec

απαπαπ

αααα+=++-=+=+.2001tan

1tan

1=-+=αα.2001tan

1tan

1=-+=

αα

例12

证明：对任一自然数n

及任意实数m

n

k

m

x

k，,2,1,0(2

=≠

π为任一整数），有

.2cot

cot

2sin

14sin

12sin

1x

x

x

x

x

n

n

-=+++

思路分析：本题左边为n

项的和，右边为2项之差，故尝试将左边各项“裂”成两项之差，并希冀能消去其中许多

中间项.证明：,2cot

cot

2sin

2cos

cos

sin

2cos

22sin

2cos

cos

22sin

122x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

x

-=-=-=

同理

x

x

x

4cot

2cot

4sin

1-=

……

x

x

x

n

n

n

2cot

2cot

2sin

11-=-

评述：①本题裂项技巧也可通过数学归纳法获得.②“裂项相消”在解题中具有一定的普遍性，类似可证下列各题：

n

n

n

n

-=

-+++α

α

ααααααtan

tan

tan)1tan(3tan

2tan

2tan

tan

.1cot

1cos

cos

88cos

12cos

1cos

11cos

0cos

1.2cot

2cot

2tan

22tan

22tan

2tan

1122=+++-=++++++ααααααn

n

n

n

例13

设ABC

?的内角A

B

C，所对的边，a

b

c

成等比数列，则

sin

cot

cos

sin

cot

cos

A

C

A

B

C

B

++的取值范围是（）

A.(0,)+∞

B.C.D.)+∞

[解]

设，a

b

c的公比为q，则2,b

aq

c

aq

==，而sin

cot

cos

sin

cos

cos

sin

sin

cot

cos

sin

cos

cos

sin

A

C

A

A

C

A

C

B

C

B

B

C

B

C

++=

++

sin()sin()sin

sin()sin()sin

A

C

B

B

b

q

B

C

A

A

a

ππ+-=

====+-．

因此，只需求q的取值范围．

因，a

b

c

成等比数列，最大边只能是a

或c，因此，a

b

c

要构成三角形的三边，必需且只需a

b

c

+>且

b

c

a

+>．即有不等式组

22,a

aq

aq

aq

aq

a

?+>??+>??即22

10,10.q

q

q

q

?--解得q

q

q

q，因此所求的取值范围是．故选C

例14

△ABC

内接于单位圆，三个内角A、B、C的平分线延长后分别交此圆于A1、B1、C

1，则C

B

A

C

CC

B

BB

A

AA

sin

sin

sin

2cos

2cos

2cos

111++?+?+?的值为（）

A

．2

B

．4

C

．6

D

．8

解：如图，连BA

1，则AA

1=2sin(B+)2

2cos(2)222sin(2)2C

B

C

B

C

B

A

A

-=-+++=)2

cos(2cos

2cos

2cos)22cos(22cos

1C

B

C

A

C

B

A

A

C

B

A

AA

-=-++-+=-=∴π,sin

sin)2cos(B

C

B

+=-+π

同理,sin

sin

2cos

1C

A

B

BB

+=,sin

sin

cos

1B

A

C

CC

+=),sin

sin

(sin

22cos

2cos

2cos

111C

B

A

C

CC

B

BB

A

AA

++=++∴原式=.2sin

sin

sin)

sin

sin

(sin

2=++++C

B

A

C

B

A

选A.例15

若对所有实数x，均有sin

sin

cos

cos

cos

2k

k

k

x

kx

x

kx

x

?+?=，则k

=（）.A、6；

B、5；

C、4；

D、3．

解：记()s

i

n

s

i

n

c

o

s

c

o

s

c

o

s

k

k

k

f

x

x

k

x

x

k

x

x

=?+?

-，则由条件，()f

x

恒为0，取2

x

π

=，得

()s

i

n

12k

k

π=-，则k

为奇数，设21k

n

=-，上式成为sin

12n

ππ?

?-=-

???，因此n

为偶数，令2n

m

=，则

41k

m

=-，故选择支中只有3k

=满足题意．故选D

例16

已知()()

2222212f

x

x

a

b

x

a

ab

b

=++-++-是偶函数，则函数图象与y

轴交点的纵坐标的最大值是

A

B.2

C.解：由已知条件可知，2

10a

b

+-=，函数图象与y

轴交点的纵坐标为2

2a

ab

b

+-。令,s

cos

in

b

a

θθ==，则2222

2sin

cos

sin

cos

2sin

2c

s

2o

a

ab

b

θθθθθθ+=+=--+≤

选

A。

例17

已知,R

αβ∈，直线

1sin

sin

sin

cos

x

y

αβαβ+=++与1cos

sin

cos

cos

x

y

αβαβ

+=++的交点在直线y

x

=-上，则cos

sin

c

in

s

s

o

ααββ+++=。

解：由已知可知，可设两直线的交点为00(,)x

x

-，且,in

s

s

co

αα为方程

00

1sin

cos

x

x

t

t

ββ

-+=++，的两个根，即为方程2

0sin

c

(cos)sin

os

(cos)i

0s

n

t

t

x

ββββββ-++-=+的两个根。

因此cos

(sin

sin

cos)ααββ+=-+，即cos

sin

c

in

s

s

o

ααββ+++=0。

1、＝。

2、已知函数)45

41(2)cos()sin()(≤≤+-=

x

x

πx

πx

x

f，则f

(x)的最小值为\_\_\_\_\_。

3、已知

3sin)2sin(=+αβα，且),(2,21Z

k

n

n

k

∈+≠+≠π

πβαπβ。则

ββαtan)tan(+的值是\_

\_\_.4、设函数f

(x)=3sin

x

+2cos

x

+1。若实数a、b、c

使得af

(x)+bf

(x

?c)=1对任意实数x

恒成立，则a

c

b

cos

=

5、设0)cos

1(2

θθ

+的最大值。

6、求证：.112tan

312tan

18tan

18tan

3=++

7、已知a

0=1,a

n

n

-(n

∈N

+)，求证：a

n

2+n

π

.8、已知.cos

sin)tan(:,1||),sin(sin

A

A

A

-=+>+=ββ

βαβαα求证

9、若A，B，C

为△ABC

三个内角，试求s

inA

+s

inB

+s

inC的最大值。

10、证明：.2

sin

21sin)2sin()sin()2sin()sin(sin

β

ββαβαβαβαα++

=

+++++++n

n

n11、已知α，β为锐角，且x

·（α+β-2π）>0，求证：.2sin

cos

sin

cos

?

??+?

??x

x

αββα

12、求证：①16

78cos

66cos

42cos

6cos

=

②sin1°sin2°sin3°…sin89°=.10641(45?

全国高中数学竞赛专题-三角恒等式与三角不等式

实战演练答案

1、解：根据题意要求，2

605x

x

+≥+，2

0571x

x

+≤+≤。于是有2

715x

x

+=+。因此

cos01==。因此答案为

1。

2、解：实际上)4541(2)4sin(2)(≤≤+-=x

x

π

πx

x

f，设)4541)(4sin(2)(≤≤-=x

ππx

x

g，则g

(x)≥0，g

(x)在]43,41[上是增函数，在]4

5,43[上是减函数，且y

=g

(x)的图像关于直线43=x

对称，则对任意]43,41[1∈x，存在]45,43[2∈x，使g

(x

2)=g

(x

1)。于是)(2)(2)(2)()(22

212111x

f

x

x

g

x

x

g

x

x

g

x

f

=+≥+=+=，而f

(x)在]45,43[上是减

函数，所以554)4

()(=

≥f

x

f，即f

(x)在]4

5,41[上的最小值是554。

3、解：

.213131sin)2sin(1sin)2sin(]sin)2[sin(21]

sin)2[sin(21

sin)cos(cos)sin(tan)tan(=-+=-+++=-+++=?+?+=+α

βααβααβααβαβββαββαb

a4、解：令c=π，则对任意的x

∈R，都有f

(x)+f

(x

?c)=2，于是取2

==b

a，c=π，则对任意的x

∈R，af

(x)+bf

(x

?c)=1，由此得1cos

-=a

c

b。

一般地，由题设可得1)sin(13)(++=?x

x

f，1)sin(13)(+-+=-c

x

c

x

f

?，其中20π2

tan

=?，于是af

(x)+bf

(x

?c)=1可化为1)sin(13)sin(13=++-+++b

a

c

x

b

x

a

??，即

0)1()cos(sin

13cos)sin(13)sin(13=-+++-+++b

a

x

c

b

c

x

b

x

a

???，所以0)1()cos(sin

13)sin()cos

(13=-+++-++b

a

x

c

b

x

c

b

a

??。

由已知条件，上式对任意x

∈R

恒成立，故必有??

?

??=-+==+)3(01)2(0

sin)1(0cos

b

a

c

b

c

b

a，若b

=0，则由(1)知a

=0，显然不满足(3)式，故b

≠0。所以，由(2)知sin

c

=0，故c=2k

π+π或c=2k

π(k

∈Z)。当

c=2k

π时，cos

c

=1，则(1)、(3)两式矛盾。故c=2k

π+π(k

∈Z)，cos

c

=?1。由(1)、(3)知21

=

=b

a，所以1cos

-=a

c

b。

5、【解】因为020π

θ，所以s

in

2θ>0,co

s

θ>0.所以s

in

2θ（1+co

s

θ）=2s

in

2θ·co

s

θ

=2cos

2cos

2sin

22222θθ

θ???

≤3

22232cos

2cos

2sin

22??

???

?

?θθθ=.9342716=

当且仅当2s

in

2θ=co

s

22θ,即tan

2θ=22,θ=2a

r

ctan

22时，s

in

θ

(1+co

s

θ)取得最大值934。

6、思路分析：等式左边同时出现

12tan

18tan、12tan

18tan

+，联想到公式β

αβ

αβαtan

tan

1tan

tan)tan(-+=+.证明：

12tan

312tan

18tan

18tan

3++

112tan

18tan)12tan

18tan

1)(1218tan(312tan

18tan)12tan

18(tan

3=+-+?=++=

112tan

18tan)12tan

18tan

1)(1218tan(312tan

18tan)12tan

18(tan

3=+-+?=++=

18tan(3

t

18(tan

3=+?=+=

评述：本题方法具有一定的普遍性.仿此可证)43tan

1()2tan

1)(1tan

1（+++22

2)44tan

1(=+

等.7、【证明】

由题设知a

n

>0，令a

n

=tana

n,a

n

∈??

?

??2,0π，则a

n

=

.tan

2tan

sin

cos

1tan

1sec

tan

1tan

1111

12n

n

n

n

n

n

n

n

a

a

a

a

a

a

a

a

==-=-=

-+-------

因为21-n

a，a

n

∈???

??2,0π，所以a

n

=121-n

a，所以a

n

=.210a

n

??

?

??

又因为a

0=tana

1=1，所以a

0=4π，所以n

n

a

??

?

??=21·4π。

又因为当0时，tanx

>x，所以.2

2tan

22++>=n

n

n

a

ππ

注：换元法的关键是保持换元前后变量取值范围的一致性。另外当x

∈??

?

??2,0π时，有tanx

>x

>s

inx，这是个熟知的结论，暂时不证明，学完导数后，证明是很容易的。

8、分析：条件涉及到角α、βα+，而结论涉及到角βα+，β.故可利用αβαβββαα-+=-+=)()(或消除条件与结论间角的差异，当然亦可从式中的“A

”入手.证法1：),sin(sin

βαα+=A),sin()sin(βαββα+=-+∴A),cos(sin))(cos

sin(),sin(sin)cos(cos)sin(βαβββαβαββαββα+=-++=+-+A

A

cos

sin)tan(,0)cos(,0cos,1||A

A

A

-=+≠+≠-∴>βββαβαβ从而

cos

sin)tan(,0)cos(,0cos,1||A

A

A

-=+≠+≠-∴>βββαβαβ从而

cos

sin)tan(,0)cos(,0cos,1||A

A

A

-=+≠+≠-∴>βββαβαβ从而

.cos

sin)tan(,0)cos(,0cos,1||A

A

A

-=+≠+≠-∴>βββαβαβ从而

证法2：αβαβββαβααββββsin)sin(cos

sin)sin()sin(sin

cos

sin

sin

sin

-++=+-=-A).tan(sin)cos(sin)sin(])sin[()sin(cos

sin)sin(βαββαββαββαβαβββα+=++=-+-++=).tan(sin)cos(sin)sin(])sin[()sin(cos

sin)sin(βαββαβ

βαββαβαβββα+=++=-+-++=).tan(sin)cos(sin)sin(])sin[()sin(cos

sin)sin(βαββαββαββαβαβββα+=++=-+-++=

9、【解】

因为s

inA

+s

inB

=2s

in

2B

A

+co

s

2sin

22B

A

B

A

+≤-,①

s

inC

+s

in

3sin

3cos

3sin

π

π

π

π

+≤-+=C

C

C,②

又因为3

sin

3cos

43sin

3sin

sin

ππ

π

π

≤-

-++

++=+++C

B

A

C

B

A

C

B

A，③

由①，②，③得s

inA

+s

inB

+s

inC

+s

in

3π≤4s

in

π,所以s

inA

+s

inB

+s

inC

≤3s

in

3π=233,当A

=B

=C

=3

π

时，（s

inA

+s

inB

+s

inC）m

ax

=233.注：三角函数的有界性、|s

inx

|≤1、|co

s

x

|≤1、和差化积与积化和差公式、均值不等式、柯西不等式、函数的单调

性等是解三角最值的常用手段。

10、证明：)],2

cos()2[cos(212sin

sin

βαβαβ

α--+-=)]sin()2sin()sin([sin

sin，)]2

2cos()212[cos(212sin)sin(,)]2

cos()25[cos(212sin)2sin()],2cos()23[cos(212sin)sin(βαβαβααβ

βαβαββαβαβαββαβ

αβαβ

βαn

n

n

n

+++++++-+-++-=++-+-=++-+-=+

各项相加得类似地

.2

sin)2sin()]2cos()212[cos(21ββαβαβα++=--++-=n

n

n

.2

1sin)2sin()]

2cos()212[cos(21ββαβαβα++=--+

+-=n

n

n

所以，.2

sin

sin)2sin()sin()sin(sin

βββαβαβαα++=+++++n

n

n

评述：①类似地，有.2

sin)2cos(21sin)cos()cos(cos

β

βαββαβααn

n

n

++=

+++++

②利用上述公式可快速证明下列各式：2sin

cos

2sin

cos

3cos

2cos

cos

θ

θθθθθθ+=++++n

n

n

.21

97cos

95cos

93cos

9cos

.2

75cos

73cos

9cos

等=+++=++ππ

πππππ.2197cos

95cos

93cos

9cos

.2

175cos

73cos

cos

等=+++=++πππππππ

11、【证明】

若α+β>2π，则x

>0，由α>2π-β>0得co

s

απ-β)=s

in

β,所以0又s

in

α>s

in

(2π-β)=co

s

β,所以0β

sin

cos

0,所以βαsin

cos

>1。

又0β

sin

cos

>1，所以2sin

cos

sin

cos

sin

cos

sin

cos

=???

?

?+?

??x，得证。

注：以上两例用到了三角函数的单调性和有界性及辅助角公式，值得注意的是角的讨论。

12、证明：①cos6°cos42°cos66°cos78°=cos6°cos54°cos66°

54cos

78cos

42cos

?

.16154cos

4)183cos(4154cos

478cos

42cos

18cos

=?==

.16154cos

4)183cos(4154cos

478cos

42cos

18cos

=?==

.16

154cos

4)

183cos(4154cos

478cos

42cos

18cos

=?=

=

②sin1°sin2°sin3°…sin89°

=(sin1°sin59°sin61°)(sin2°sin58°sin62°)…(sin29°sin31°sin89°)sin30°sin60°

=4

387sin

6sin

3sin)41(29?

60sin

30sin)87sin

33sin

27(sin)66sin

54sin

6)(sin

63sin

57sin

3(sin

3)4

(30=

45)54sin

36)(sin

63sin

27)(sin

72sin

18)(sin

18sin

9(sin

3)41(81sin

18sin

9sin

3)41(4040???=??=

45sin)54sin

36)(sin

63sin

27)(sin

72sin

18)(sin

18sin

9(sin

3)41(81

sin

18sin

9sin

3)41(4040???=??=

又)72cos

1)(36cos

1(41)36sin

18(cos

-+=

165)72cos

36cos

1(4

1)72cos

36cos

72cos

36cos

1(41=+=--+=

165)72cos

36cos

1(4

1)72cos

36cos

72cos

36cos

1(41=+=--+=

165)72cos

36cos

1(4136cos

72cos

36cos

1(41=+=--+=

即

.45

36sin

18cos

=

所以

.106)4

(89sin

2sin

1sin

45?=

36sin

18cos

3)41(54cos

72sin

223)41(54cos

18sin

36cos

18cos

223)41(54cos

72cos

36cos

18cos

223)41(18cos

36cos

54cos

72cos

223)41(72sin

54sin

36sin

18sin

223)41(434342424242?=?=?=?=?=?=

36sin

18cos

223)41(54cos

72sin

223)41(54cos

18sin

36cos

18cos

223)41(54cos

72cos

36cos

18cos

223)41(18cos

36cos

54cos

72cos

223)41(72sin

54sin

36sin

18sin

223)41(434342424242?=?=?=?=?=?=

36sin

18cos

223)41(54cos

72sin

223)41(54cos

18sin

36cos

18cos

223)41(54cos

72cos

36cos

18cos

223)41(18cos

36cos

54cos

72cos

223)41(72sin

54sin

36sin

18sin

223)41(434342424242?=?=?=?=?=?=

36sin

18cos

223)41(54cos

72sin

223)41(54cos

18sin

36cos

18cos

223)41(54cos

72cos

36cos

18cos

223)41(18cos

36cos

54cos

72cos

223)41(72sin

54sin

36sin

18sin

223)41(434342424242?=?=?=?=?=?=

36sin

18cos

223)41(54cos

72sin

223)41(54cos

18sin

36cos

18cos

223)41(54cos

72cos

36cos

18cos

223)41(18cos

36cos

54cos

72cos

223)41(72sin

54sin

36sin

18sin

223)4(434342424242?=?=?=?=?=?=

36sin

18cos

223)41(54cos

72sin

223)41(54cos

18sin

36cos

18cos

223)41(54cos

72cos

36cos

18cos

223)41(18cos

36cos

54cos

72cos

223)41(72sin

54sin

36sin

18sin

3)41(434342424242?=?=?=?=?=?=

本DOCX文档由 www.zciku.com/中词库网 生成，海量范文文档任你选，，为你的工作锦上添花,祝你一臂之力！