# 微分几何答案彭家贵陈卿

来源：网络 作者：海棠云影 更新时间：2025-04-16

*习题一（P13）2.设是向量值函数，证明：（1）常数当且仅当；（2）的方向不变当且仅当。（1）证明：常数常数常数。（2）注意到：，所以的方向不变单位向量常向量。若单位向量常向量，则。反之，设为单位向量，若，则。由为单位向量。从而，由常向量。...*

习题一（P13）

2.设是向量值函数，证明：

（1）常数当且仅当；

（2）的方向不变当且仅当。

（1）证明：常数常数常数。

（2）注意到：，所以的方向不变单位向量常向量。

若单位向量常向量，则。

反之，设为单位向量，若，则。

由为单位向量。

从而，由常向量。

所以，的方向不变单位向量常向量

。即的方向不变当且仅当。

补充：

定理

平行于固定平面的充要条件是。

证明：：若平行于固定平面，设是平面的法向量，为一常向量。

于是。

：若，则。若

则方向固定，从而平行于固定平面。

若，则。令则

3.证明性质1.1与性质1.2。

性质1.1（1）证明：设，则

（2）证明：设，则

（3）证明：设，则

同理，所以。

性质1.2

证明：（1）

证明：（2）

4.设是正交标架，是的一个置换，证明：

（1）是正交标架；

（2）与定向相同当且仅当是一个偶置换。

（1）证明：当时，；

当时，所以，是正交标架。

（2）证明：

A)当

B)当

C)当

D)

当，此时，；

E)

当

F)

当

所以，与定向相同当且仅当是一个偶置换。

习题二（P28）

1.求下列曲线的弧长与曲率：

（1）

解：

所以，2.设曲线，证明它的曲率为

证明：

3.设曲线C在极坐标下的表示为，证明曲线C的曲率表达式为

证明：

所以，；；

。

因此，4.求下列曲线的曲率与挠率：

（4）

解：。

所以，。

5.证明：的正则曲线的曲率与挠率分别为。

证明：

根据弗雷内特标架运动方程，得：

所以。

6．证明：曲线

以为弧长参数，并求出它的曲率，挠率与Frenet标架。

证明：1）

所以，该曲线以为弧长参数。

由及

得

所以，2）。

3）所求Frenet标架是，其中。

10.设是中的一个合同变换。是中的正则曲线。求曲线与曲线的弧长参数、曲率、挠率之间的关系。

解：（1）

可见，与曲线除相差一个常数外，有相同的弧长参数。

（2）

可见，与曲线有相同的曲率。

（3）

可见，与曲线的曲率相差一个符号。

13.（1）求曲率（是弧长参数）的平面曲线。

解：设所求平面曲线因为是弧长参数，所以

可设，由曲率的定义，知

所以，所求平面曲线。

20.证明：曲线与曲线是合同的。

证明：1）对曲线作参数变换，则。

可知是圆柱螺线()，它的曲率和挠率分别为。因此，只要证明曲线的曲率，挠率，从而根据曲线论基本定理，它们可以通过刚体运动彼此重合。

2）下面计算曲线的曲率与挠率。

由，进而。

21.证明：定理4.4

定理4.4

设是连续可微函数，则

（1）

存在平面的曲线，它以为弧长参数，为曲率；

（2）

上述曲线在相差一个刚体运动的意义下是唯一的。

证明：先证明（1），为此考虑下面的一阶微分方程组

给定初值，其中是中的一个与自然标架定向相同的正交标架，以及，则由微分方程组理论得，有唯一一组解满足初始条件：。

若为所求曲线，则必是它的Frenet标架。因此，我们首先证明

均是与自然定向相同的正交标架。

将微分方程组改写成其中。

是一个反对称矩阵，即令

对求导，并利用有：

表明是微分方程组的解。

定义则

且

即

所以，是微分方程组的解。

注意到：，所以是微分方程组

满足初始条件的唯一解。从而

所以，均是正交标架。

由于是关于的连续函数，且。故由

知。

可见，均是与自然定向相同的正交标架。

于是由微分方程组有：，这表明为弧长参数。从而由推出是单位切向量。由推出是曲线的曲率，从而由推出由，即是单位正法向量。

可见，微分方程组的满足初始条件：

唯一一组的确表明：存在平面的曲线，它以为弧长参数，为曲率，当是连续可微函数时。

再证明（2）：设与是平面中两条以为弧长参数的曲线，且定义在同一个参数区间上。则存在刚体运动

把曲线变为，即。

证明开始：设，考虑两条曲线在处的Frenet标架

与。

则存在平面中一个刚体运动把第二个标架变为第一个标架，即与在处的Frenet标架重合。因此我们只须证明当曲线与在处的Frenet标架重合时。

曲线Frenet标架的标架运动方程为

这是一个关于向量值函数的常微分方程。曲线的Frenet标架与的Frenet标架都是微分方程组的解。它们在处重合就意味着这两组解在的初值相等，由解对初值的唯一性定理立即得到。定理证明完成。

习题三（P68）

2（1）是什么曲面？

解：

4.证明：曲面的切平面过原点。

证明：无妨假定方程确定一个的隐函数，于是

设，则

所以，处的切平面为

易见，当时，有：

所以结论为真。

6.证明：曲面在点的切平面等于曲面上过点的曲线在点的切向量的全体。

证明：设曲面的参数方程为。令为参数区域中过则的参数曲线，为曲面上过点的曲线。于是

这表明曲线过点的切向量都可由与线性表出。可见过点的切向量都在过点的切平面上。另一方面，对于任意切向量，在参数区域中取过且方向为的参数曲线

则此时，从而。

这表明：在点的切平面中每一个向量都是过点的某一曲线的位于点的切向量。

于是：曲面在点的切平面等于曲面上过点的曲线在点的切向量的全体。

25.求双曲抛物面的Gauss曲率，平均曲率，主曲率和它们所对应的主方向.解：

由，。，其中。

由。

于是Gauss曲率：，平均曲率：。

因为，所以，所以主曲率：

对应的主方向为，其中

.所以。

同理，另一个主曲率：，对应的主方向为。

注：设为外恩格尔登变换，则。

补充：定理

（1）函数是主曲率的充要条件是。

（2）方向

d

=

du:dv

是主方向的充要条件是。

证明：（1）设是对应的主方向，则有，即。

分别用与上式两边作内积，得。

所以主方向满足

由于不全为零，可得

（2）在脐点。

从而由可知，，中的两个方程成为恒等式。此时，任何方向都是主方向。

在非脐点，分别用和代入

得到相应的主方向

和。

将

改写成由于不全为零，有。

28．曲面上的一条曲线称为曲率线，如果曲线在每一点的切向量都是曲面在该点的一个主方向。证明：曲线是曲率线当且仅当沿着，与平行。

证明：

设为外恩格尔登变换，则。

所以，曲线是曲率线当且仅当沿着，与平行。

29.设是曲面的一个参数表示，证明：曲面的参数曲线和

是曲率线的充要条件是。

证明：曲面的参数曲线，记是曲率线等价于曲线在每一点的切向量都是曲面在该点的一个主方向曲线在每一点，同理，曲面的参数曲线，记是曲率线等价于曲线在每一点的切向量都是曲面在该点的一个主方向曲线在每一点，显然，（假若，则矛盾！）。从而。

所以，曲面的参数曲线和是曲率线的充要条件是。

35.若曲面是极小曲面，证明：除相差一个常数外，它可以写成，这个曲面称为Scherk面。

证明：设曲面的参数方程为，则。

因此，。

由得到，即。

上式可化为

(1)

由于上式左边是的函数，右边是的函数，故只能是常数，设此常数为。

当时，由(1)可知，其中是常数。

于是该极小曲面是平面，其中。(不是Scherk曲面)

下面设。由(1)得，令，即。则有。

于是。在轴方向作一平移，可设，从而，积分得。

同理，由可得。

于是。

本DOCX文档由 www.zciku.com/中词库网 生成，海量范文文档任你选，，为你的工作锦上添花,祝你一臂之力！