# 12全国高中数学联赛试题及详细解析

来源：网络 作者：海棠云影 更新时间：2024-06-24

*2024年全国高中数学联赛一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分．把答案填在题中的横线上．1.设是函数（）的图像上任意一点，过点分别向直线和轴作垂线，垂足分别为，则的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.6.设是定义在上的奇函数，且当时...*

2024年全国高中数学联赛

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分．把答案填在题中的横线上．

1.设是函数（）的图像上任意一点，过点分别向

直线和轴作垂线，垂足分别为，则的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.6.设是定义在上的奇函数，且当时，．若对任意的，不等式恒成立，则实数的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.7．满足的所有正整数的和是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.8．某情报站有四种互不相同的密码，每周使用其中的一种密码，且每周都是从上周未使用的三种密码中等可能地随机选用一种．设第1周使用Ａ种密码，那么第7周也使用种密码的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.（用最简分数表示）

二、解答题：本大题共３小题，共５６分．解答应写出文字说明、推理过程或演算步骤．

9．（本小题满分16分）已知函数

（1）若对任意，都有，求的取值范围；

（2）若，且存在，使得，求的取值范围．

10．（本小题满分２０分）已知数列的各项均为非零实数，且对于任意的正整数，都有

（1）当时，求所有满足条件的三项组成的数列;

（2）是否存在满足条件的无穷数列，使得若存在，求出这样的无穷数列的一个通项公式；若不存在，说明理由．

11．（本小题满分20分）

如图5，在平面直角坐标系中，菱形的边长为，且．

（1）求证：为定值；

（2）当点A在半圆（）上运动时，求

点的轨迹．

三、（本题满分50分）

设是平面上个点，它们两两间的距离的最小值为

求证：

四、（本题满分50分）

设，是正整数．证明：对满足的任意实数，数列中有无穷多项属于．这里，表示不超过实数的最大整数．

[来源:学.科.网]

2024年全国高中数学联赛一试及加试试题

参考答案及详细评分标准(A卷word版)

一、填空题：本大题共８小题，每小题８分，共６４分．把答案填在题中的横线上．

１．

设是函数（）的图像上任意一点，过点分别向直线和轴作垂线，垂

足分别为，则的值是

．

２．

设的内角的对边分别为，且满足，则的值是

.【答案】4

[来源:学&科&网Z&X&X&K]

３．设，则的最大值是

.【答案】[来源:学&科&网]

【解析】不妨设则

因为

所以

当且仅当时上式等号同时成立.故

4.抛物线的焦点为，准线为ｌ，是抛物线上的两个动点，且满足．设线段ＡＢ的中点在ｌ上的投影为，则的最大值是

.【答案】1[来源:Zxxk.Com]

【解析】由抛物线的定义及梯形的中位线定理得

在中,由余弦定理得

当且仅当时等号成立.故的最大值为1.5．设同底的两个正三棱锥和内接于同一个球．若正三棱锥的侧面与底面所成的角为，则正三棱锥的侧面与底面所成角的正切值是

．

6.设是定义在上的奇函数，且当时，．若对任意的，不等式恒成立，则实数的取值范围是

．

【答案】

７．满足的所有正整数的和是

．

【答案】33

【解析】由正弦函数的凸性,有当时,由此得

所以

故满足的正整数的所有值分别为它们的和为.８．某情报站有四种互不相同的密码，每周使用其中的一种密码，且每周都是从上周未使用的三种密码中等可能地随机选用一种．设第１周使用Ａ种密码，那么第７周也使用Ａ种密码的概率是

．（用最简分数表示）

二、解答题：本大题共３小题，共５６分．解答应写出文字说明、推理过程或演算步骤．

９．（本小题满分１６分）已知函数

（１）若对任意，都有，求的取值范围；

（２）若，且存在，使得，求的取值范围．

１０．（本小题满分２０分）已知数列的各项均为非零实数，且对于任意的正整数，都有

（１）当时，求所有满足条件的三项组成的数列;

（２）是否存在满足条件的无穷数列，使得若存在，求出这样的无穷数列的一个通项公式；若不存在，说明理由．

１１．（本小题满分２０分）

如图5，在平面直角坐标系中，菱形的边长为，且．

（１）求证：为定值；

（２）当点A在半圆（）上运动时，求

点的轨迹．

【解析】因为所以三点共线

如图,连结,则垂直平分线段,设垂足为,于是有

(定值)

(2)设其中则.因为所以

由(1)的结论得所以从而

故点的轨迹是一条线段,其两个端点的坐标分别为

2024年全国高中数学联赛加试试题（卷）

一、（本题满分４０分）[来源:学科网]

如图，在锐角中，是边上不同的两点，使得设和的外心分别为，求证：三点共线。

证法一:令消去得

由于这方程必有整数解;其中为方程的特解.把最小的正整数解记为则,故使是的倍数．……40分

证法二:由于由中国剩余定理知,同余方程组

在区间上有解即存在使是的倍数．…………40分

证法三:由于总存在使取使则

存在使

此时因而是的倍数．……………40分

三、（本题满分５０分）

设是平面上个点，它们两两间的距离的最小值为

求证：

四、（本题满分５０分）

设，ｎ是正整数．证明：对满足的任意实数，数列中有无穷多项属于．这里，表示不超过实数ｘ的最大整数．

【解析】证法一:(1)对任意,有

证法二:(1)

本DOCX文档由 www.zciku.com/中词库网 生成，海量范文文档任你选，，为你的工作锦上添花,祝你一臂之力！