# 法向量的求法及其空间几何题的解答

来源：网络 作者：天地有情 更新时间：2024-11-22

*XX一对一个性化辅导教案教师科目数学时间2024年X月X日学生年级高二学校XX校区授课内容空间法向量求法及其应用立体几何知识点与例题讲解难度星级★★★★教学内容上堂课知识回顾（教师安排）：1.平面向量的基本性质及计算方法2.空间向量的基本性...*

XX一对一个性化辅导教案

教师

科目

数

学

时间

2024

年

X

月

X日

学生

年级

高二

学校

XX校区

授课内容

空间法向量求法及其应用

立体几何知识点与例题讲解

难度星级

★★★★

教学内容

上堂课知识回顾（教师安排）：

1.平面向量的基本性质及计算方法

2.空间向量的基本性质及计算方法

本堂课教学重点：

1.掌握空间法向量的求法及其应用

2.掌握用空间向量求线线角，线面角，面面角及点面距

3.熟练灵活运用空间向量解决问题

得分：

平面法向量的求法及其应用

一、平面的法向量

1、定义：如果，那么向量叫做平面的法向量。平面的法向量共有两大类（从方向上分），无数条。

2、平面法向量的求法

方法一(内积法):在给定的空间直角坐标系中，设平面的法向量[或，或]，在平面内任找两个不共线的向量。由，得且，由此得到关于的方程组，解此方程组即可得到。

二、平面法向量的应用

1、求空间角

(1)、求线面角：如图2-1，设是平面的法向量，AB是平面的一条斜线，则AB与平面所成的角为：

图2-1-1:

图2-1-2:

图2-1-1

α

B

A

C

A

B

α

图2-1-2

C

α

图2-3

β

β

α

图2-2

(2)、求面面角:设向量，分别是平面、的法向量，则二面角的平面角为：

（图2-2）;

(图2-3)

两个平面的法向量方向选取合适,可使法向量夹角就等于二面角的平面角。约定，在图2-2中，的方向对平面而言向外，的方向对平面而言向内；在图2-3中，的方向对平面而言向内，的方向对平面而言向内。我们只要用两个向量的向量积（简称“外积”，满足“右手定则”）使得两个半平面的法向量一个向内一个向外，则这两个半平面的法向量的夹角即为二面角的平面角。

2、求空间距离

图2-4

n

a

b

A

B

（1）、异面直线之间距离:

方法指导：如图2-4,①作直线a、b的方向向量、，求a、b的法向量，即此异面直线a、b的公垂线的方向向量；

②在直线a、b上各取一点A、B，作向量；

图2-5

A

α

M

B

N

O

③求向量在上的射影d，则异面直线a、b间的距离为,其中

A

a

B

α

图2-6

（2）、点到平面的距离:

方法指导：如图2-5,若点B为平面α外一点，点A

为平面α内任一点，平面的法向量为，则点P到

平面α的距离公式为

图2-7

α

β

A

B

（3）、直线与平面间的距离:

方法指导：如图2-6,直线与平面之间的距离：，其中。是平面的法向量

（4）、平面与平面间的距离:

方法指导：如图2-7,两平行平面之间的距离：

图2-8

α

a，其中。是平面、的法向量。

3、证明

图2-9

α

a

（1）、证明线面垂直：在图2-8中,向是平面的法向量，是直线a的方向向量，证明平面的法向量与直线所在向量共线（）。

（2）、证明线面平行：在图2-9中,向是平面的法向量，是直线a的方向向量，证明平面的法向量与直线所在向量垂直（）。

图2-10

β

α

（3）、证明面面垂直：在图2-10中，是平面的法向量，是平面的法向量，证明两平面的法向量垂直（）

图2-11

α

β

（4）、证明面面平行：在图2-11中,向是平面的法向量，是平面的法向量，证明两平面的法向量共线（）。

图3-1

C

D

M

A

P

B

三、高考真题新解

1、（2024全国I，18）（本大题满分12分）

已知如图3-1,四棱锥P-ABCD的底面为直角梯形，AB∥DC，底面ABCD，且PA=AD=DC=AB=1，M是PB的中点

（Ⅰ）证明：面PAD⊥面PCD；

（Ⅱ）求AC与PB所成的角；

（Ⅲ）求面AMC与面BMC所成二面角的大小

解:以A点为原点,以分别以AD，AB，AP为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系A-xyz如图所示.，设平面PAD的法向量为，设平面PCD的法向量为，即平面PAD平面PCD。，，设平在AMC的法向量为.又,设平面PCD的法向量为..面AMC与面BMC所成二面角的大小为.2、(2024年云南省第一次统测19题)

(本题满分12分)

图3-2

如图3-2，在长方体ABCD－A1B1C1D1中，已知AB＝AA1＝a，BC＝a，M是AD的中点。

(Ⅰ)求证：AD∥平面A1BC；

(Ⅱ)求证：平面A1MC⊥平面A1BD1；

(Ⅲ)求点A到平面A1MC的距离。

解:以D点为原点,分别以DA,DC,DD1为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系D-xyz如图所示.，设平面A1BC的法向量为

又，,即AD//平面A1BC.，设平面A1MC的法向量为:,又，设平面A1BD1的法向量为:，,即平面A1MC平面A1BD1.设点A到平面A1MC的距离为d,是平面A1MC的法向量,又,A点到平面A1MC的距离为:.四、用空间向量解决立体几何的“三步曲”

(1)、建立空间直角坐标系(利用现有三条两两垂直的直线，注意已有的正、直条件,相关几何知识的综合运用，建立右手系)，用空间向量表示问题中涉及的点、直线、平面，把立体几何问题转化为向量问题；（化为向量问题）

（2）、通过向量运算，研究点、直线、平面之间的位置关系以及它们之间距离和夹角等问题；（进行向量运算）

（3）、把向量的运算结果“翻译”成相应的几何意义。（回到图形问题）

立体几何知识点和例题讲解

一、知识点

常用结论

1．证明直线与直线的平行的思考途径：（1）转化为判定共面二直线无交点；（2）转化为二直线同与第三条直线平行；（3）转化为线面平行；（4）转化为线面垂直；（5）转化为面面平行.2．证明直线与平面的平行的思考途径：（1）转化为直线与平面无公共点；（2）转化为线线平行；（3）转化为面面平行.3．证明平面与平面平行的思考途径：（1）转化为判定二平面无公共点；（2）转化为线面平行；（3）转化为线面垂直.4．证明直线与直线的垂直的思考途径：（1）转化为相交垂直；（2）转化为线面垂直；（3）转化为线与另一线的射影垂直；（4）转化为线与形成射影的斜线垂直.5．证明直线与平面垂直的思考途径：（1）转化为该直线与平面内任一直线垂直；（2）转化为该直线与平面内相交二直线垂直；（3）转化为该直线与平面的一条垂线平行；（4）转化为该直线垂直于另一个平行平面；（5）转化为该直线与两个垂直平面的交线垂直.6．证明平面与平面的垂直的思考途径：（1）转化为判断二面角是直二面角；（2）转化为线面垂直.7.夹角公式

：设a＝，b＝，则cos〈a，b〉=.8．异面直线所成角：=

（其中（）为异面直线所成角，分别表示异面直线的方向向量）

9.直线与平面所成角：(为平面的法向量).10、空间四点A、B、C、P共面，且

x

+

y

+

z

=

11.二面角的平面角

或（，为平面，的法向量）.12.三余弦定理：设AC是α内的任一条直线，且BC⊥AC，垂足为C，又设AO与AB所成的角为，AB与AC所成的角为，AO与AC所成的角为．则.13.空间两点间的距离公式

若A，B，则=.14.异面直线间的距离：

(是两异面直线，其公垂向量为，分别是上任一点，为间的距离).15.点到平面的距离：（为平面的法向量，是经过面的一条斜线，）.16.三个向量和的平方公式：

17.长度为的线段在三条两两互相垂直的直线上的射影长分别为，夹角分别为,则有.（立体几何中长方体对角线长的公式是其特例）.18.面积射影定理

.(平面多边形及其射影的面积分别是、，它们所在平面所成锐二面角的).19.球的组合体(1)球与长方体的组合体:

长方体的外接球的直径是长方体的体对角线长.(2)球与正方体的组合体:正方体的内切球的直径是正方体的棱长,正方体的棱切球的直径是正方体的面对角线长,正方体的外接球的直径是正方体的体对角线长.(3)

球与正四面体的组合体:

棱长为的正四面体的内切球的半径为,外接球的半径为.20.求点到面的距离的常规方法是什么？（直接法、体积法）

21.求多面体体积的常规方法是什么？（割补法、等积变换法）

〈二〉温馨提示：

1.在用反三角函数表示直线的倾斜角、两条异面直线所成的角等时，你是否注意到它们各自的取值范围及义？

①

异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角的取值范围依次.②

直线的倾斜角、到的角、与的夹角的取值范围依次是．

③

反正弦、反余弦、反正切函数的取值范围分别是．

二、题型与方法

【例题解析】

考点1

点到平面的距离

求点到平面的距离就是求点到平面的垂线段的长度，其关键在于确定点在平面内的垂足，当然别忘了转化法与等体积法的应用.例1如图，正三棱柱的所有棱长都为，为中点．

A

B

C

D

（Ⅰ）求证：平面；

（Ⅱ）求二面角的大小；

（Ⅲ）求点到平面的距离．

考查目的：本小题主要考查直线与平面的位置关系，二面角的大小，点到平面的距离等知识，考查空间想象能力、逻辑思维

能力和运算能力．

解答过程：解法二：（Ⅰ）取中点，连结．

为正三角形，．

在正三棱柱中，平面平面，平面．

x

z

A

B

C

D

O

F

y

取中点，以为原点，，的方向为轴的正方向建立空间直角坐标系，则，，，，．，，．

平面．

（Ⅱ）设平面的法向量为．，．，令得为平面的一个法向量．

由（Ⅰ）知平面，为平面的法向量．，．

二面角的大小为．

（Ⅲ）由（Ⅱ），为平面法向量，．

点到平面的距离．

小结：本例中（Ⅲ）采用了两种方法求点到平面的距离.解法二采用了平面向量的计算方法，把不易直接求的B点到平面的距离转化为容易求的点K到平面的距离的计算方法，这是数学解题中常用的方法；解法一采用了等体积法，这种方法可以避免复杂的几何作图，显得更简单些，因此可优先考虑使用这一种方法.考点2

异面直线的距离

此类题目主要考查异面直线的距离的概念及其求法，考纲只要求掌握已给出公垂线段的异面直线的距离.例2已知三棱锥，底面是边长为的正三角形，棱的长为2，且垂直于底面.分别为的中点，求CD与SE间的距离.思路启迪：由于异面直线CD与SE的公垂线不易寻找，所以设法将所求异面直线的距离，转化成求直线与平面的距离，再进一步转化成求点到平面的距离.解答过程：

如图所示，取BD的中点F，连结EF，SF，CF，为的中位线，∥∥面,到平面的距离即为两异面直线间的距离.又线面之间的距离可转化为线上一点C到平面的距离，设其为h，由题意知，,D、E、F分别是

AB、BC、BD的中点，在Rt中，在Rt中，又

由于，即，解得

故CD与SE间的距离为.小结：通过本例我们可以看到求空间距离的过程，就是一个不断转化的过程.考点3

直线到平面的距离

此类题目再加上平行平面间的距离，主要考查点面、线面、面面距离间的转化.例3．

如图，在棱长为2的正方体中，G是的中点，求BD到平面的距离.B

A

C

D

O

G

H

思路启迪：把线面距离转化为点面距离，再用点到平面距离的方法求解.解答过程：

解析一

∥平面，上任意一点到平面的距离皆为所求，以下求

点O平面的距离,，平面,又平面

平面，两个平面的交线是,作于H，则有平面，即OH是O点到平面的距离.在中，.又.即BD到平面的距离等于.解析二

∥平面，上任意一点到平面的距离皆为所求，以下求点B平面的距离.设点B到平面的距离为h，将它视为三棱锥的高，则,即BD到平面的距离等于.小结：当直线与平面平行时，直线上的每一点到平面的距离都相等，都是线面距离.所以求线面距离关键是选准恰当的点，转化为点面距离.本例解析一是根据选出的点直接作出距离；解析二是等体积法求出点面距离.考点4

异面直线所成的角

此类题目一般是按定义作出异面直线所成的角，然后通过解三角形来求角.异面直线所成的角是高考考查的重点.例

4、如图，在中，斜边．可以通过以直线为轴旋转得到，且二面角的直二面角．是的中点．

（I）求证：平面平面；

（II）求异面直线与所成角的大小．

思路启迪：（II）的关键是通过平移把异面直线转化到一个三角形内.解答过程：解法1：（I）由题意，，是二面角是直二面角，又，平面，又平面．

平面平面．

（II）作，垂足为，连结（如图），则，是异面直线与所成的角．

在中，，．

又．

在中，．

异面直线与所成角的大小为．

解法2：（I）同解法1．

（II）建立空间直角坐标系，如图，则，，，．

异面直线与所成角的大小为．

小结：

求异面直线所成的角常常先作出所成角的平面图形，作法有：①平移法：在异面直线中的一条直线上选择“特殊点”，作另一条直线的平行线，如解析一，或利用中位线，如解析二；②补形法：把空间图形补成熟悉的几何体，其目的在于容易发现两条异面直线间的关系，如解析三.一般来说，平移法是最常用的，应作为求异面直线所成的角的首选方法.同时要特别注意异面直线所成的角的范围：.考点5

直线和平面所成的角

此类题主要考查直线与平面所成的角的作法、证明以及计算.线面角在空间角中占有重要地位，是高考的常考内容.例5.四棱锥中，底面为平行四边形，侧面底面．已知，，．

（Ⅰ）证明；

（Ⅱ）求直线与平面所成角的大小．

考查目的：本小题主要考查直线与直线,直线与平面的位置关系，二面角的大小，点到平面的距离等知识，考查空间想象能力、逻辑思维能力和运算能力．

解答过程：

D

B

C

A

S

解法二：

（Ⅰ）作，垂足为，连结，由侧面底面，得平面．

因为，所以．

又，为等腰直角三角形，．

如图，以为坐标原点，为轴正向，建立直角坐标系，，，D

B

C

A

S，所以．

（Ⅱ）取中点，连结，取中点，连结，．，．，与平面内两条相交直线，垂直．

所以平面，与的夹角记为，与平面所成的角记为，则与互余．，．，所以，直线与平面所成的角为．

小结：求直线与平面所成的角时，应注意的问题是（1）先判断直线和平面的位置关系；（2）当直线和平面斜交时，常用以下步骤：①构造——作出斜线与射影所成的角，②证明——论证作出的角为所求的角，③计算——常用解三角形的方法求角，④结论——点明直线和平面所成的角的值.考点6

二面角

此类题主要是如何确定二面角的平面角，并将二面角的平面角转化为线线角放到一个合适的三角形中进行求解.二面角是高考的热点，应重视.例6．如图，已知直二面角，，，直线和平面所成的角为．

（I）证明；

A

B

C

Q

P

（II）求二面角的大小．

命题目的：本题主要考查直线与平面垂直、二面角等基本知识，考查空间想象能力、逻辑思维能力和运算能力.A

B

C

Q

P

O

H

过程指引：（I）在平面内过点作于点，连结．

因为，所以，又因为，所以．

而，所以，从而，又，所以平面．因为平面，故．

（II）解法一：由（I）知，又，，所以．

过点作于点，连结，由三垂线定理知，．

故是二面角的平面角．

由（I）知，所以是和平面所成的角，则，不妨设，则，．

在中，所以，于是在中，．

故二面角的大小为．

A

B

C

Q

P

O

x

y

z

解法二：由（I）知，，故可以为原点，分别以直线为轴，轴，轴建立空间直角坐标系（如图）．

因为，所以是和平面所成的角，则．

不妨设，则，．

在中，所以．

则相关各点的坐标分别是，，．

所以，．

设是平面的一个法向量，由得

取，得．

易知是平面的一个法向量．

设二面角的平面角为，由图可知，．

所以．

故二面角的大小为．

小结：本题是一个无棱二面角的求解问题.解法一是确定二面角的棱，进而找出二面角的平面角.无棱二面角棱的确定有以下三种途径：①由二面角两个面内的两条相交直线确定棱，②由二面角两个平面内的两条平行直线找出棱，③补形构造几何体发现棱；解法二则是利用平面向量计算的方法，这也是解决无棱二面角的一种常用方法，即当二面角的平面角不易作出时，可由平面向量计算的方法求出二面角的大小.考点7

利用空间向量求空间距离和角

众所周知，利用空间向量求空间距离和角的套路与格式固定.当掌握了用向量的方法解决立体几何问题这套强有力的工具时，不仅会降低题目的难度，而且使得作题具有很强的操作性.例7．如图，已知是棱长为的正方体，点在上，点在上，且．

（1）求证：四点共面；

（2）若点在上，点在上，垂足为，求证：平面；

（3）用表示截面和侧面所成的锐二面角的大小，求．

命题意图：本小题主要考查平面的基本性质、线线平行、线面垂直、二面角等基础知识和基本运算，考查空间想象能力、逻辑推理能力和运算能力．

过程指引：

解法二：

（1）

建立如图所示的坐标系，则，，所以，故，共面．

又它们有公共点，所以四点共面．

（2）如图，设，则，而，由题设得，得．

因为，有，又，所以，从而，．

故平面．

（3）设向量截面，于是，．

而，得，解得，所以．

又平面，所以和的夹角等于或（为锐角）．

于是．

故．

小结：向量法求二面角的大小关键是确定两个平面的法向量的坐标，再用公式求夹角；点面距离一般转化为在面BDF的法向量上的投影的绝对值.考点9.简单多面体的侧面积及体积和球的计算

棱柱侧面积转化成求矩形或平行四边形面积，棱柱侧面积转化成求三角形的面积.直棱柱体积V等于底面积与高的乘积.棱锥体积V等于Sh其中S是底面积，h是棱锥的高.课后练习题

15.【2024高考四川文14】如图，在正方体中，、分别是、的中点，则异面直线与所成的角的大小是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。

28.【2024高考四川文19】(本小题满分12分)

如图，在三棱锥中，，点在平面内的射影在上。

（Ⅰ）求直线与平面所成的角的大小；

（Ⅱ）求二面角的大小。

29.【2024高考重庆文20】（本小题满分12分，（Ⅰ）小问4分，（Ⅱ）小问8分）

已知直三棱柱中，，为的中点。

（Ⅰ）求异面直线和的距离；

（Ⅱ）若，求二面角的平面角的余弦值。

43．【2024高考上海文19】本题满分12分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分6分

如图，在三棱锥中，⊥底面，是的中点，已知∠＝，，求：（1）三棱锥的体积

（2）异面直线与所成的角的大小（结果用反三角函数值表示）

本DOCX文档由 www.zciku.com/中词库网 生成，海量范文文档任你选，，为你的工作锦上添花,祝你一臂之力！