# 李银雪个人总结

来源：网络 作者：春暖花香 更新时间：2024-07-17

*第一篇：李银雪个人总结工 作 总 结（白沙乡党委委员、副乡长 李银雪）2024年5月10日近五年来，我始终力求做好本职工作、学习党的理论知识、团结务实、开拓创新、坚持科学发展观，在同志们的关心、支持和帮助下，以“服从领导、团结同志、认真学...*

**第一篇：李银雪个人总结**

工 作 总 结

（白沙乡党委委员、副乡长 李银雪）

2024年5月10日

近五年来，我始终力求做好本职工作、学习党的理论知识、团结务实、开拓创新、坚持科学发展观，在同志们的关心、支持和帮助下，以“服从领导、团结同志、认真学习、扎实工作”为准则，始终坚持高标准、严要求，在学习、思想和工作等方面取得了一定的成绩。现总结如下：

一、加强学习，提高了自身素质

加强学习是提高自身素质的最好方法，是提高工作水平和能力最重要的途径。五年来，我始终坚持把政治理论学习和业务知识学习作为重要任务来对待，以积极的态度和饱满的热情学习马克思主义理论、十六、十七大精神，以及各种法律法规。通过学习提高了自身素质，加强了党性修养，增强了公仆意识和宗旨意识，提高了自己的政治敏锐性和鉴别力。

二、拒腐防变，抓好了思想建设

思想道德素质是正确行使党和人民赋予的权力，完成党和人民交给的工作不可缺少的主观条件。作为一名共产党员领导干部，本人能够摆正自己的位臵，认清自己的角 色，树立正确的权力观，坚持立党为公，执政为民，以饱满的精神状态投入到全心全意为人民服务中去。我深明“政者、正也”的道理。有一腔浩然正气，工作才能无所畏惧，在前进的路上不摇摆、不迷失、不跌倒。我在平时工作中注意树立良好的思想作风，做“三个代表”坚定的信仰者、传播者、实践者，时刻保持正确的政治方向和政治立场，加强廉洁自律，在思想上筑牢拒腐防变的防线，始终保持清醒的头脑，自尊、自重、自省、自警、自励，在任何情况下都耐得住寂寞，守得住清贫，顶得住诱惑，经得住考验，做到一身正气，一尘不染。在大事大非面前，讲党性原则，是非分明，立场坚定，不信谣传谣，思想上、政治上始终同党中央保持高度一致。

三、恪尽职守，做好了本职工作

㈠做教师时（2024年至2024年11月）。认真求知悟教，探索素质教育真谛，大胆以寓教于乐的开放式教学方法，与学生共同吸食语文课本上的人文食粮和掌握语文基础知识及技能，教会学生学会做人、学会学习、学会生活。2024年所教的小学六年级取得全镇同年级第一名、三年级取得全镇同年级第二名的成绩。2024年所教的初中九年级班级语文平均分为74分，所教学生有1人考取兴义八中、2人考取兴义一中、4人考取兴义五中。很好地完 成了各学期的教育、教学任务。

㈡当乡长助理期间（2024年11月至2024年9月）。调到白沙后，我及时进入角色，紧紧围绕乡党委、政府的各项中心工作，充分发挥作为一个乡长助理应有的参谋助手作用。一是准确把握工作难点和重点，掌握情况，协助完善，较好地贯彻好乡党委、政府的决策部署。二是紧贴乡党委、政府的中心工作，围绕难点问题，积极调研苗头性、倾向性、预测性的事物和工作，努力为乡党委、政府领导决策提供全方位、多领域、多角度的决策意见和建议。一直努力协助乡长工作、分管过“整脏治乱”工作、负责过党政办公室工作、协助过政法委书记抓党建和人事工作、兼任过白沙社区党支部书记等。“整脏治乱”工作方面，2024年度、2024年度全年考核均在全县前五名以前。党政办公室工作方面，一是接待和会议工作多次得到州县领导的好评；二是协调督办好全乡各口工作，使全乡工作在2024年度和2024年度的绩效考核中均获得全县第一名；三是信访维稳工作扎实开展，没有出现群体上访事件；四是把党政办公室的几位新同志培养成了业务骨干。党建工作方面，积极探索和创新第三批深入学习实践科学发展观活动试点工作方法，为全县开展该项活动提供了经验。全面调研，为白沙社区做了五至十五年的发展规划。特别 是在负责党政办公室工作中，我首先尽快熟悉白沙乡的三定方案和各项规定，在实践中深刻领会党政办的职责、定位和作用，树立好大局意识、发展意识和服务意识，把握好在领导面前的参谋辅政和部门之间的协调服务的定位以及单位内部的工作领班的定位。接着狠抓班子建设，发挥团队精神，我请乡里懂办公室工作的领导帮助指导，充分整合党政办全体人员力量，形成合力，让办文、办会、办事、接待、值班、卫生等各项工作的质量都得到提高，使乡党政班子成员间的分工负责、相互支持、相互补位渐成风尚，使全乡各项工作做到忙而不乱、协调有序，办事效率大为提高。

㈢任党委委员、副乡长后（2024年9月至今）。根据班子分工，我分管电力、邮政、电信、民宗、气象、粮食、供销等工作，主要在人口与计生工作中包铁厂村。各项工作，我都深入群众进行调研，跑部门协调，争取领导支持。为全乡多个自然村寨争取农网改造工程13.5公里，受益群众247户1529人；冰灾、风灾时多次带领部门工作人员检修、抢修通信设施确保通信尽快畅通；为更好地开展白沙乡的民族宗教工作，到各个少数民族村寨进行认真调研，组织撰写了《白沙乡民族宗教资源调研报 告》；到铁厂村家家户户进行人口与计划生育的宣传工作和排查工作，以坚定的政治立场和对党的无比忠诚开展和完成好所包村的计生工作，集中精力，团结干部职工，以宣传教育为主，以行政措施为辅，将优质服务与落实节育措施有机结合起来，按对象就是任务的思路开展工作，落实男扎术1例、女扎术47例（其中二女结扎术4例）、上环术63例、引产术4例，征收社会抚养费6.9万元，超额完成了各季度计划生育工作任务，在全乡计生队伍中起到了很好的表率作用。

四、存在的不足和今后努力的方向

一是政治理论学习，特别是科学发展观的学习，还有待进一步加强，与新时期、新任务的要求还有较大差距；二是综合协调能力还有待进一步提高。

在今后的工作中，我要认真总结以往的经验教训，以更高的标准要求自我，不断提升工作水平，不遗余力地投入到自己的工作中去，不辜负党和人民的重托，力争让组织放心、人民满意。

**第二篇：“全县优秀共产党员”先进材料(李银雪)**

立足本职 扎根基层

——李银雪同志的先进事迹

李银雪同志于2024年调到白沙乡人民政府工作以来，以全心全意为人民服务为宗旨，以崇高的事业心和责任感勤勤恳恳地履行着自己的工作，以科学发展观为指导，尽心尽力地做好自己的本职工作。

一、加强学习、自觉锻炼。无论工作多紧、多累，李银雪同志总是以饱满的热情和高度的责任感如饥似渴地学习，他从不间断学习业务知识、工作方法和马克思主义理论，着力提高自己的履职能力和工作水平。并且他注重学以致用，善于运用理论指导实践。他也经常要求他分管的干部要加强学习，他说：“业务知识重要，党的理论知识更重要。业务知识能够帮助我们精准地完成工作，党的理论能够让我们增强党性、提高本领，保证政治上清醒和坚定”。

二、勤政务实、争先创优。根据班子分工，李银雪同志分管电力、邮政、电信、民宗、气象、粮食、供销等工作，主要在人口与计生工作中包铁厂村。各项工作，他都应对以勤。找群众调研，跑部门协调，争取领导支持。为全乡多个自然村寨争取农网改造工程13.5公里，受益群众247户1529人；冰灾、风灾时多次带领部门工作人员检修、抢修通信设施确保通信尽快畅通；为更好地开展白沙乡的民族宗教工作，到各个少数民族村寨进行认真调研，组织撰写了《白沙乡民族宗教资源调研报告》；到

**第三篇：李银毕业论文**

齐 齐 哈 尔 大 学

毕业设计（论文）

题

目

用概率论的方法证明组合恒等式

学

院

理

学

院

专业班级

信息与计算科学 082

学生姓名

李 银

指导教师

崔 继 贤

成绩

\*\*\*\*年\*\*月\*\*日

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)

摘要

组合恒等式是组合数学中的一个组成部分，也是组合数学研究的一个重要内容.本文主要探讨如何利用概率方法研究组合恒等式，主要从不同的角度解答同一概率问题，得到同一事件的概率两种不同的表达形式，由其相等导出组合恒等式.通过构造概率模型，利用“必然事件的概率等于1”和“不可能事件的概率等于0”证明组合恒等式，或者利用古典概率方法证明组合恒等式，也就是在实际问题中将需要证明的组合恒等式引证出来。对于需要被证明的组合恒等式，将所构造概率模型中相关事件的概率计算出来以后，从而推导出式子两端相等。每种论证方法中首先总的介绍这种方法是用的什么思想，然后列举例子加以论证，使所述问题更加透彻.关键字：组合恒等式；概率模型； 古典概率； 数字特征

I

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)

Abstract Combinatorial identity is an important part and research field of combinatorics.This paper explores using probabilistic method to derive combinatorial identities.We count a probabilistic problem by using different ways to obtain different expresses for the question.We build a probabilistic model on a classical probability to find or prove some identities by constructing the event whose probability equals 1 or 0, that is，the

the equatin will be drawn from the concrete problems.We investigate combinatorial identities using probability properties and numeral characters of a random variable with discrete type.Each method was first demonstrated the general description of what this method is thought, and then held some examples discussed.Keywords: Combinatorial identity;probabilistic model;classical probability;numeral characters

II

目 录

摘要............................................................................................................................I Abstract........................................................................................................................II 第1章

绪

论..........................................................................错误！未定义书签。

1.1引言......................................................................................................................1 1.2课题背景............................................................................错误！未定义书签。1.3实际应用方面的价值..........................................................................................2

1.4本文主要的研究内容..........................................................................................3 1.5相关工作..............................................................................................................3 第2章 运用概率论的基本理论证明组合恒等式......................................................4 2.1运用完备事件组证明组合恒等式......................................................................4 2.2运用全概率公式证明组合恒等式......................................................................7

2.3运用概率性质证明组合恒等式..........................................................................8 第3章 运用概率理论构造数学模型证明组合恒等式............................................11 3.1运用随机变量的数字特征证明组合恒等式....................................................11 3.2运用构造概率模型证明组合恒等式................................................................18 3.3运用等概率法证明组合恒等式........................................................................22 第4章 由概率方法引申出的恒等式证明................................................................26 4.1 级数恒等式的证明............................................................................................26 4.2 初等恒等式的证明............................................................................................27 4.3级数组合恒等式的证明....................................................................................27 总结..............................................................................................................................31 参考文献......................................................................................................................32 致谢..............................................................................................................................33

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)

第1章

绪

论

1.1引言

当前，组合恒等式无论是在中学还是大学都应用广泛，很多问题都涉及到这方面的解法.在组合数学中，有很多类型的组合恒等式.这么多纷繁复杂的组合恒等式，我们必须寻求一种最简便的方法使问题得以解决，查阅过很多资料，通过很多证明方法的检验，我们寻求除了一种组合恒等式的证明方法－组合恒等式的概率方法.对于较为简单的组合恒等式，我们可以一步就分析出结果，稍复杂的需要我们演算一两步达到欲求的结果，但是并不是所有的组合恒等式都是那么的简单，有的组合恒等式很复杂，我们要深入了解，就必须通过一步步的证明、深究，证明组合恒等式的方法有很多，譬如有分类法、概率法、求导法等一系列方法证明组合恒等式.本文，我们选用利用概率方法来证明组合恒等式，我主要介绍这几种方法：构造模型法、概率性质法、数字特征法，这些都是前人通过比较发现的较为好的方法，我们加以更好的应用，我们应当看到组合恒等式与概率二者的结合，只要把握了这一点，相信就能够从中受益匪浅，感触颇多.含有组合数的恒等式叫做组合恒等式.简单的组合恒等式的化简和证明，可以直接运用课本所学的基本组合恒等式.事实上，许多试题中出现的较复杂的组合数计算或恒等式证明，也往往运用这些基本组合恒等式，通过转化，分解为若干个简单的组合恒等式而加以解决.我们简单的介绍四种组合恒等式：二项式组合恒等式、关于Catalan三角数的组合恒等式、基于格路模型的组合恒等式、由概率引起的组合恒等式.通过对一些组合恒等式的了解，我们就选用各种概率的方法加以证明它们，达到一个比较完善的效果.1.2课题背景

组合数学是以离散结构为主要研究对象的一门学科，它主要研究满足一定条 件的组态(一种安排)的存在性、计数及构造等方面的问题.近几年，随着计算机科学的产生与发展，组合数学得到了迅速的发展。

概率起源于欧洲国家的一种赌博方式——掷骰子。随着科学技术发展的迫切需要，概率论在20世纪迅速地发展起来。柯尔莫哥洛夫首次用测度理论定义了什么是概率。他的公理化方法不仅成为现代概率论的基础，还使概率论成为严谨的数学分支。

由于其他学科、技术的推动，概率论得到飞速发展，理论课题不断扩大与深

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)入，应用范围大大拓宽。俄罗斯的彼得堡数学学派，继承和发展了古典概率论之精华，拯救了濒临危机的概率论；变革和制定了一系列研究方法，振兴了概率论学科；提出和创立了概率论新思想，开拓了概率论新领域。由于资料的限制、语言的困难和文化的差异使得国内外系统研究彼得堡数学学派概率思想者还甚少，有关资料相当匮乏，一些相关论述大都出现在综合性的书籍中，倾向于按照现代数学的习惯给出一般性的解释，且多为简要性介绍，读者难以了解其精髓所在。鉴于彼得堡数学学派在概率论发展史上的重要地位，本文以概率论思想为主线，通过建立概率模型,对概率思想证明恒等式方面进行了简单的应用。

组合数学和概率论的产生都可以追溯到十七世纪，从17世纪到20世纪30年代，组合数学受到娱乐及数论、概率论、化学等学科的推动而迅速发展，得到了一般的存在定理和计数原理，如抽屉原理、容斥原理、波利亚计数定理等，还解决了一系列著名而有趣的组合学问题，如更列问题、家政问题、36军官问题等，自20世纪以来，许多理论学科和应用学科给组合数学提出了大量的具有理论和实际意义的课题，促使了许多新理论的产生，如区组设计、组合算法等，从而解决了一系列理论上的以及与经济发展密切相关的课题。此外证明常见的组合恒等式中概率的方法也有所应用。

1.3实际应用方面的价值

大家都知道，在证明初等恒等式的时候，如果我们采用初等方法，在一般情况下比较困难，在许多数学分支中，有很多的组合恒等式的形式通常不是显而易见的，证明它们有一定的难度，这就会使得它们的应用受到限制。如果可以对于会有带来很多的便利。用概率论的方法去解决一些分析学中的问题或者证明一些组合恒等式，是概率论与数理统计研究的重要方向之一，根据有关资料的例子可以看出，运用概率论的方法来证明组合恒等式，是值得我们探讨的一个十分有意义的新问题。因为在运用概率论的方法证明组合恒等式时，它的思维灵活，背景生动并且容易理解，表达方式单间，并且效率高而被许多数学家所喜爱。但是要熟练掌握这种证明方法，需要掌握知识的内部联系，而且必须了解知识的客观背景，弄清楚知识的来龙去脉，编制知识的网络结构，抓住问题的主要特征。如果在教学中利用好这类综合性解题的良好教材，则可以冲发挥这种类型题材的应用。

在学习概率论中，我们首先接触到得的是古典概型，这些概率模型的特点是所研究的样本容量中样本的个数是有限的，常利用排列组合方法去解决古典概型中的问题，如分配问题，伯努利概型等。对于一些离散型随机变量，也可用排列组合方法进行讨论，如超几何分布等。反过来，可以通过构造这些特殊的概率模型，利用概率模型的性质，如概率函数的规范性，可以求解一些用常规方法难证

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)明的恒等式。有些恒等式用常用的分析方法证明是很不易的，如中学中的排列组合恒等式、或者更复杂的恒等式的证明，建立了概率模型后，通过求概率的思想，能很方便地把恒等式证明出来。

1.4本文主要的研究内容

本课题研究的内容是利用概率论的知识，巧妙地将其与组合恒等式有关的概率构造出来并对其计算，分析，同时对组合恒等式加以证明，并由此给出了组合恒等式概率论的方法证明的方法和思路。

用概率论的方法证明组合恒等式的主要思想是在证明组恒等式的时候，如果我们从概率论的角度去分析它们可以使问题变得简单，也就是说对于需要被证明的组合恒等式，在构造构造好概率模型之后，从不同角度的角度考虑其概率或随机变量的数字特征，在运用概率论的公式，有关性质，结论等，将所构造的模型相关事件的概率计算出来，从而可以推导出需要证明的结论，从而对于组合恒等式的证明更加即便容易掌握。

1.5相关工作

用概率论的方法证明一些关系式或者解决其他一些分析学中的问题，是概率论的研究方向之一，本篇论文就是这方面应用的结果。关于组合恒等式的证明我们通常采用的是分析学的方法，但是用概率论的方法证明一些组合恒等式却更加的简便。对于如何使用概率论的方法证明组合恒等式，经过本人得仔细思考，大致总结了以下几个方法：

（1）运用完备事件组证明组合恒等式（2）运用全概率公式证明组合恒等式

（3）运用随机变量的数字特征证明组合恒等式（4）运用构造概率模型证明组合恒等式（5）运用等概率法证明组合恒等式（6）运用概率性质证明组合恒等式

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)第2章 用概率论的基本理论证明组合恒等式

2.1 运用完备事件组证明组合恒等式

这种方法的基本思想是：我们对于一些组合恒等式，可以构造出适当的模型，并且选择出与组合恒等式相关的随机变量，并求出它的分布列

P{i}Pi(i1,2,,n)

接着我们再利用完备事件组的性质Pi1，于是我们便达到了证明组合和恒等

i1式的目的。

引理 设{A1,A2,,An}构成一个完备事件组，即A1,A2,,An互斥，nniAi1，则P(Ai)1。[1]

i1n例

1证明组合恒等式：

Ck0kn22(mk)Cnk2(mk)C2n2m

证明

我们可以利用完备事件组的性质，构造成如下概率模型：

假设盒子里有n副大小不同的手套，现在我们从中随机抽取2m只（2m<n），那么正好有k副手套配对的概率为：

pkCpCmkk2m2k12m2k(C2)2m2nC(k0,1,2,,m)

m根据完备事件组的性质知道：

nPk0k1

于是可以得到

Ck0kn22(mk)Cnk2(mk)C2n2m

例

2证明组合恒等式

Cnk1CnkCnk1

证明

首先我们将公式变形为

CnCkkn1CnCk1kn11

现在我们利用完备事件组的性质，构造如下概率模型：一批货物共n1个，准备批发出厂.若已知其中有一个是废品，现在从中随机地抽取k个货物出来1k n1，问废品被抽到的概率是多少？抽出k个货物中没有废品的概率又

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)是多少？

若记事件A1为“抽出k个货物中没有废品”的事件，那么事件A2A1就是“抽到k个货物中有废品”的事件，即A1和A2为两个对立事件.有

PA1CnCkkn1.PA2PA1C1Cnk1k1Cn1.由于A1,A2构成完备事件组，所以，有

PA1PA21.从而有

成立，即有

Cnk1CnkCnk1 成立.例

3证明组合恒等式

CmCnCmCn0k1k1CnkkCn1Cnk1kCn11

CmCnCmCmCmn(其中m,n,kN,km,kn)

k11k0k证明

现在我们利用完备事件组的性质，构造如下概率模型：设盒子中有m张红色卡片和n张白色卡片，每次取出k(kmn)张卡片，求得到i(im)张卡片的概率。(i0,1,2,,k)

记事件Ai为“取得i张红色卡片和k-i张白色卡片”(i0,1,2,,k)则A0A1Ak，且A0,A1,A2,,Ak互不相容，kk于是

1P()P(Ai)i0P(A)

ii0k又因为P(Ai)CmCnikikkCmn这样得出

Ci0imCmkiCmn

0k1k1k11k0kCnCmCnCmCnCmCmCmn 所以

Cm123nn12Cn3CnnCnn2例

4证明组合恒等式

Cn

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)证明

现在我们利用完备事件组的性质，构造如下概率模型：将n个箱子排成一列，从红黑白三种颜色的M张卡片中任取n(nM)张卡片放到这n个箱子里，如果n张卡片中恰有一张红色卡片，则包含的基本事件为n2n1。

记事件Ai为“恰有n-i张白色卡片”（in1），则这ni张白色卡片放在n个箱子里共有Cnn1种放法，而对于其他i个箱子只能放1张红色卡片和i1张黑色卡片，又有i种方法。所以，事件Ai包含的基本事件数为iCnn1 于是

P(Ai)iCnn2n1n1

显然，A0,A1,A2,,An互不相容，并且A0A1An

nnin所以

1P()P(Ai)i1P(A)i1i1iCnn2n1n1

又由于

CnniCni

123nn12Cn3CnnCnn2于是

Cn

例5 证明范德蒙（Vendermonde）恒等式

CnCmCnCm0k1k1CnCmCnmk0k

证明 我们首先来构造一个如下的概率模型：

设一个盒子中有nm张不同的卡片，其中n张红色卡片m张白色卡片，我们随机的从中取出k张卡片并且不放回作为一组。

记随机变量为取出的n张卡片所包含的红色卡片数，我们可以容易的计算出的分布列为

P{i}CnCmkikiCnmi0,1,2,,min(n,k)

并且由分布列的性质我们可以得出

min(n,k)min(n,k)P{i0i}1即

Ci0inCbkiCnm

kk1k1k0kCnCmCnCmCnm 但是当mn时 Cnm0 所以Cn0Cm

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)2.2 运用全概率公式证明组合恒等式

引理

设{Bn}为的一个有限划分，即BkBi（ki），（k,i1,2,,n.）

nBk1k则AF1且P(Bk)0(k1,2,,n)，n，P(A)P(Bk1i)P(ABi)成立。

[1]

例

证明组合恒等式

Cnk1Cnk1Cnk11Cnk1 证明

首先我们将公式变形为

CnCk1kn1Cn1Ck1kn1Cn1Ckn1k1

接着我们利用全概率公式，构造如下概率模型：

设箱子中有nm张卡片，但是其中有一张黑色卡片，一张白色卡片，现在随机从中抽取k张卡片（1kn1）

记事件A为“抽取的k张卡片中含有黑色卡片”

事件A为“抽取的k张卡片中含有白色卡片” 则P(A)C1CnCkn10k,由全概率公式：

C1Cnk1k1P(A)P(B)P(AB)P(B)P(AB)Cn1C1Cn1Cnk11k2C1CnCn1k0kC1Cn1Cnk1k1Cn1kk2Cn1Cn1kk1Cn1由于

PAPA1 从而得出

CnCk1kn1Cn1Ck1kn1Cn1Ckn1k1

即

Cnk1Cnk1Cnk11Cnk1

如果将上述摸卡片模型稍微需做一下改变，设箱子中有n1张卡片，其中仅有一张黑色卡片，其余均为白色卡片，就可以证得组合加法公式：

Cnk1CnkCnk1

如果我们建立如下摸卡片模型：设箱子里有m张黑色卡片和n张白色卡片，现在从中随机抽取k（0kmn）张卡片，仿照此例子，利用伯努利概率公式

PkCnkpkqnk 我们可以证明组合公式

CmCnCmCn0k1k1CmCnCmCmCmn

k11k0k

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)2.3 运用概率性质证明组合恒等式

我们利用概率的性质来证明组合恒等式，这是一种方便的证明方法，而且简单易懂，通常用“必然事件的概率等于1”和“不可能事件的概率等于0”来证明。

例1 证明组合恒等式 Cnkkk0n112k2n

证明 我们构造如下概率模型：

设一个人有两瓶牙签，每瓶n根，每次用牙签时，他在两瓶中任取一瓶．然后抽出一根，使用若干次后，发现一瓶牙签已经用完，求另一盒中还有r根牙签的概率.如果用 A1，A2分别表示甲瓶或者乙瓶中余下r根牙签.用 Ar 表示一瓶用完，而另一瓶中有r根的事件，则ArA1A2.注意到，当发现一瓶已空时．这一瓶必定在前面已用过n次，另一瓶余下r根，从而另一瓶已用过nr次，故共用了2nr1次.每次取到甲(乙)瓶的概率是12.所以

PArPA1A2PA1PA2  =C21n2nr11222nrnnr12Cn2nr1122nnr

1=C2nnr2

n由于r 的取值必定是1,2,,n之一，故Ar为必然事件，即

r1nPAr1，r11也就是 C2nnr2r1n2nr1

令knr, 则k0,1,,n1，1所以 Cnkk2k0n1nkn11或Cnkkk012k2.n例2 证明组合恒等式当kn时，齐齐哈尔大学毕业设计(论文)

kkk12n1n2n1C1Cn11Cn11

nnn1n证明 我们建立如下概率模型：

设有k张卡片，等可能地投入n个箱子，求每一个箱子中至少有一张卡片的概率.记事件B为每一箱子中至少有一张卡片

事件Ai为第i个箱子中没有卡片（i1,2,,n）则 BA1A2A3An 根据容斥原理，得

PBPA1A2A3An

nPAPA1i1i1i21nni1Ai2

1ni1i2in11i1i2in1kPAi1Ai2Ain11n1PA1A2An

因为PAin1knk11（i1,2,,n）

n21(对任意的i1i2)

nkPAi1Ai2n2knk依次类推，对任意的i1i2in，我们有

PAi1Ai2Ai331nk

PAi1Ai2Ain1n11nkk

nPA1A2An1n于是

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)ni1n11PAiCn1nk PAiAi12i1i21i1i222Cn1nk

所以12n1n2n1PBC1Cn11Cn1

nnnkkk1n从而 PB1PB

kkk112n1n即 PB1Cn1Cn211Cnn11nnn

但是由于kn ,事件B每一箱子中至少有一张卡片为一不可能事件，故

P(B)0,从而当knk时.kk12n1 C1Cn21(1)nCnn11nnn1n1.1232n12Cn3CnnCn2n 例3 证明组合恒等式 Cn证明 我们构造如下概率模型：

有一枚均匀的硬币，我们重复投掷n次，求它正面向上的次数的期望。显然，我们知道~B(n,)，于是便得出：

2nnn1 Ekp(i0k)kCi0kn1n()2kCi0kn2n

而且 k1,第k次试验正面朝上0,第k次试验反面朝上nnk1,2,,n

所以便得到 E()E(k)k1ni0Ekn2

kC那么

i0kn2nn2

1232n12Cn3CnnCn2n 整理后，得 Cn

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)第3章 运用概率理论构造数学模型证明组合恒等式

3.1 运用随机变量的数字特征证明组合恒等式

在概率论中，我们可以讨论随机变量的数字特征，并且通过随机变量的数学期望而进一步证明一些恒等式。而运用随机变量的数字特征来证明组合恒等式就是我们依照需要被证明的组合恒等式的特点，然后构造出合适的随机变量，并且利用随机变量的数字特征的定义，性质来证明组合恒等式成立的方法，其中可以利用数学期望，数学方差等。利用数字特征法是证明组合恒等式的一种比较重要的方法，我们在了解了具体概念后就用一系列的例子加以说明并且具体阐述，从而让我们了解到这种方法是怎样的一种方法。

引理3.1.1

若随机变量的方差D(),则D()=E(2)E2()引理3.1.2

伯努利概型设有服从二项分布

Ai{i},i0,.1,2,,n(其中0p1，n为非负整数n[1])，并有

Cininp(1p)ini1[1]

k例1

证明组合恒等式

CkminCkCn2mmnm

证明

当m=1和m=2时，我们可以用以下证明方法： 设~b（n，p），PkCnkpkqnk(k0,1,2,,n),0p1且pq1

n当m=1时：

E()12nkCk0nknpqknknp

令p=，则kCn2knk1n11n1，也就是Ck1CnkCn 2k1当m=2时：

nE()E[(1)]E[(1)]E()2k(k1)Ck1knknPqknknp

n根据公式D()=E()E()，从而得出npq12n22k(k1)Ck2n(n1)2n2

令p=，则

k(k1)Ck2knn(n1)2n2

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)以上两个是特例，它的一般性情况证明如下：

运用推广的伯努利概型和多项式分布，我们构造如下概率模型：

设一个盒子中有红黄白三种颜色的卡片若干，每次随机抽取一张，取后放回，这样连续做n次，p1和p2表示每次抽取红色卡片与黄色卡片的概率，1和2表示每次抽到的红色卡片与黄色卡片的次数。于是（1，2）服从多项分布，其分布律为

P{ii,jj}令p114,p212n!i!j!(nij)!p1p2(1p1p2)ijnij，则联合分布率为：

n!i!j!(nij)!122n1

P{ii,jj}nm

它的边缘分布为：P(2m)1i0p{1i,12m} 112n同时

2~B(n,),P(2m)Cnm()m()nmCnm222

因为多项分布的边缘分布是二项分布，从而两式相等，也就是：

nm

Ci0minCmiCn2imnm

k所以证得原组合恒等式CniCkmCnm2nm成立。

kmm1例2

证明组合恒等式

Ci1Ci1i1nmmnm1n1

证明

我们利用随机变量的数字特征，构造出一下概率模型：

设一个盒子中装有n张白色卡片，m张黑色卡片，一张接一张地将卡片取出，直到取出白色卡片为止，求平均要取多少张卡片。

这是求一个随机变量X的期望值：

记事件{Xi}={取出的前i-1张卡片全是黑色卡片}，1(Xi)令Xi0(Xi)，那么

xiixi

Xi0Xi0Xix110x

i1ix1

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)

i1xim!由于Xi非负，所以EXE(Xi0)P(Xi1i)Ci1Cmi1nm

但是我们可以将EX更简单的表示形式计算出来，于是我们假设已经把所有的同时令X1表示第一张白色卡片之前的黑色卡片nm张卡片从盒子中取出来了，张数,,最后Xn1表示最末一张白色卡片之后的黑色卡片张数，根据X1的定义：

X1X2Xn1m,Ex1Ex2Exn!m

n!m!(nm)!在考虑x1,x2,,xn1的联合分布为P{X1i1,X2i2,,Xn1in1}=中i1,i2,,in1是非负整数，它们的和为m。，其这是因为从盒中取出的nm张卡片一共有(nm)!种可能方法。而且，取出的先是i1张黑色卡片，接着是一张白色卡片，再接着是i2张黑色卡片，接着又是一张白色卡片等等，很明显，共有n!m!种可能方式。因此，就可以得到上述式子。

于是我们可以得到：X1,X2,,Xm1的联合分布是i1,i2,,in1的对称函数，所以对任意n个变量求和，所得到的结果是相同的，于是我们知道xi的边缘分布相同。从而

EXimn1(i1,2,,n1),EX[1Xi]1m1mn1nm1n1

于是我们得出

Ci1Ci1i1nmmnm1n1

如果采用分析学的方法来证明这个组合恒等式是非常难的，所以我们采用数字特征法来证明。

nnkn例3

证明组合恒等式

kCk1n2n1，kk12Cnn(n1)2kn2.证明

我们可以考虑下列随机变量的数字特征.设一名篮球运动员在条件相同下向同一篮筐投篮n次，每次进球的概率为12，考虑“投进篮筐次数”这个随机变量X的数字特征.1,第k次投进篮筐

记 Xk0,第k次没有进篮筐

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)则X1、X2、X3、、Xn独立同为二点分布：PXi1PXi0（i1,2,,n）, 且XX1X2Xn服从二项分布B(n,所以

EXE(X1X2Xn)=EXkk1nn1212)

k1PX11n2

DXDX1X2Xnnnk1DXknDX1n4

而

EX12nnkPXk0knk12nnnkCk1knkn



kCk1n2n

2即

kCk1n2n1

又

EXkPX2k0k12nnkk12kCn

EX2DXEX

2

12nnkk12Cknn

即 42rn2nkCnn(n1)2k12kn2

例

4证明组合恒等式

Ck0kmCnrkCmn

r证明 考察从由nm个大人和n个孩子组成的家庭队伍中选取r1个人参加亲子比赛的问题.所选r1个人中大人的人数用X 表示，则随机变量X服从超几何分布，且

PXkCm1Cnr1kr1kCmn1（k0,1,,r1）

于是

EXr1kk0Cm1CnCrkr1k r1mn1m1r1r1k1r1kCmCnrmn1Cmnk1m1r1krkCmCnrmn1Cmnk0

令

1,第k个大人被选中Xk0,第k个大人未被选中

PXk1r1mn（k1,2,,m1）

r1mn1;EXkPXk1, k1,2,,m1.齐齐哈尔大学毕业设计(论文)

XX1X2Xm1



EXEXPXkk1k1nm1m1k1r1m1mn1k

例

5证明组合恒等式

k1Cn1/Cmn1k1mnm(m1)

证明 一个盒子中装有m张白色卡片n张黑色卡片，我们进行连续不放回地抽取卡片，直至摸到白色卡片时为止，下面考察取黑色卡片数的数学期望.设随机变量表示取黑色卡片数

1,前（i-1）次都是取到的黑色卡i0,前（i-1）次至少取到白色卡片n片，第i次也取到黑色卡片一次，或第i次取到白色卡片其中i1,2，，n则

i1i

又

pi1n(n1)ni1mnmn1mni1

且

Eipi1 于是我们得出

nniEEi1mnmn1mni1i1nn1ni1nmnmnmn1mnm3m2mnm2m1nnn1nn14nn143m12mnmnmn1mnm4mnm3m1nnn1nn15nn14m13mnmnmn1mnm5mnm4m1nnn1mnmnm1nm1nn1nn132nn1321化简时，每一次只将最后两项通分k个

同时，k黑，黑，黑，白 其中k0,1,2,,n.k1k1.则pkCnkm/Cmn

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)从而

Ekpk0nk1n1k1nkknKCk1knm/k1Ck1mnmnCn1/mnCmn1k1k1nk11

Cmnmn/Cmn1n 由E的唯一性知：nmnmnk1Cn1/Cmn1k1knm1

k整理即得：Cnk11/Cmn1k1mnmm1n.例6

证明组合和恒等式

k2k0kC2nk2n1C2n2nn2n

证明

首先，我们构造如下概率模型：

设某人有两瓶牙签，每一瓶都有n根，每次用牙签的时候，他在两盒中任取一盒，然后抽出一根适用若干次后，发现一瓶牙签已经用完，求另一瓶中有k根牙签的概率。

如果用 A1，A2分别表示甲或乙瓶中余下 k根牙签.用 Ar 表示一盒用完，而另一盒中有 k根的事件，则ArA1A2.注意到，当发现一盒已空时． 这一盒必定在前面已用过 n次，另一盒余下k根，从而另一盒已用过n—k 次，故共用了2 n —k +1 次.每次取到甲(乙)瓶的概率是

12.所以

PArPA1A2PA1PA2 11

=C2nnr2221nnr11nC2nr2221nnr

=C于是我们得出：

n2nr122nr

pkC2nkn122nk,k0,1,2,,n.下面用不同的方法计算随机变量的期望值.齐齐哈尔大学毕业设计(论文)

2nk根据定义：E122nkpk0nnknkCk0n2nk12

=K2k0knC2nk

另一方面，设Eu，由pk1知：

k0nnnnunpkk0KPk0n1k0KKnkPk0nk12nkP2nknkCk0n1nk2nknkCk0n1n1nk2nk122nk2nkCk0n1k0nk12nk1122nk1122nkp2n122n12k1112n1pk0n1k12k0k1pk11p0/2

2n122n移项整理得：E2n1p01由E的唯一性知：nC2n1

nn122nnk0k2C2nkkn2n122nC2n1

整理即得：k2kC2nnk2n1C2nn22n

k0n1例7 证明组合恒等式 k(k1)(nk)2Cn41

k2证明 我们构造如下概率模型：

设有n张扑克牌，其中只有3张是K,我们将扑克牌洗一遍之后再从中随机不放回抽取，直到抽取到第二张K为止，此时抽出的纸牌数为，求它的期望。

首先我们先需要计算出的分布列，按照古典概率的计算：

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)P(k)3!(n3)!(k1)(nk)n!6(k1)(nk)n(n1)(n2),k2,3,,n1

然后根据数学期望的定义我们可以得出：

n1Ekp(k2k)k(k1)(nk) n(n1)(n2)k26n1另外，我们假设从最低下开始一张一张地翻牌，直到抽取到第二张K出现为止，此时抽出的纸牌数目为，由对称性可知，与有相同的分布列，于是也有相同的数学期望，即EE,而且它们有关系：n1 对这个式子两边求期望：EEn1 所以En12然后将其带入式可得

n1k(k1)(nk)2C

4n1k23.2 运用构造概率模型证明组合恒等式

运用构造概率模型证明组合和恒等式大体上分为两步：

n 第一步，将待证明的组合恒等式改写为Pi1的形式；

i1 第二步，通过构造出合适的概率模型，使得完备事件组Ai(i1,2,,n)互斥，n并且Ai，同时P(Ai)pi(i1,2,,n)。

i1 其中第一步需要掌握灵活的恒等式变形能力，以及敏锐的观察力，而要完成关键的第二步，必须对于古典概率问题有深刻的理解，还要把握许多的综合条件，同时具有丰富的联想能力。由于证明中的关键是对随机事件概率的逆过程的求解——我们需要由Pk去寻找Ak,故在思考过程中起主导作用的是发散性思维，创造性思维。

例1 证明组合恒等式 Cnk1Cnk1Cnk11Cnk1 证明 首先我们将公式变形为

CnCk1kn1Cn1Ck1kn1Cn1Ckn1k1

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)接下来，我们构造这样的概率模型：

一个盒子里装有n1张卡片，其中有一张红色卡片，一张黑色卡片，n1张白色卡片，现随机地从盒子中抽取k张卡片.设事件A为k张卡片中有红色卡片的事件，事件A的逆事件记为A.则 PAC1CnC1k1kn1;

设事件B为k张卡片中有黑色卡片的事件，事件B的逆事件记为B,由事件间的关系有

AABBABAB.从而 PAPABAB

PABPAB 所以 PAC1C1Cn1Ckn101k1C1C1Cn1CCnkn100k.k1k由对立事件和得性质PAPA1.可得

k1kCn1Cn1Cn1Cn1Cn1kk1

从而 Cnk1Cnk1Cnk11Cnk1

例2 证明组合恒等式 1CnmC1n11CnmCnm1C1n111C1n2CnmC3C2C1C1n11111C1m1C1mnm.证明 我们首先将公式变形为 CmCn11CmCnmCnCn11111CmCnmCnm1CnCn1Cn2111111CmCnmC3C2C1CnCn1Cm1Cm1111111111

接下来，我们构造这样的概率模型：

一个盒子中中装有n张卡片，其中有m张红色卡片，现在从中连续取出卡片并且不放回，求取得红色卡片的概率。

记事件A为取得红色卡片，事件Ai为第i次取得红色卡片 于是我们得到 A=A1A1A2A1A2A3A1A2AnmAnm1 由加法公式、乘法公式及条件概率的定义，得

PACmC1n1CnmC1n1CmC1n11CnmC1n1Cnm1C1n11C1C11m1CmC1m1

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)显然，只要逐个取卡片，早晚是要取得红色卡片的.即事件A为一必然事件，故P(A)1.所以1CnmCn111CnmCnm1Cn1Cn21111CnmC3C2C1Cn1Cm1Cm1111111nm.古典概率与组合数有着十分密切的联系，某些组合式本身或稍加整理，就具有某种明显的概率意义.例如

CmCnmCrnkrk就可视为下面概率问题的解：“某盒中有n个球，其中有红球m个，今从盒中任取 r个球，求恰有k个红球的概率”，基于这一点，对某些组合恒等式，我们可采用古典概率的方法来证明.nkkn例3 证明组合恒等式 CmCrkCmr1 nm kk0n证明 我们构造如下古典模型：

一个城市的道路是经纬均匀网状，李某的家庭住址和上班地点恰好分别处于两个交叉点.以李某的家庭住址所在的两条路为坐标轴、交叉点为坐标原点，建立直角坐标系，并使李某的上班地点处于坐标系第一象限之中.设李某的上班地点位于点(mnr1,n).考虑李某从家庭住址到上班地点走过的路最短时所选择的路径问题，（即在以(0,0)、(0,n)、(mnr1,n)、(mnr1,0)为顶点的矩形内，李某从住处到单位上班沿与X轴平行的方向行走时只能向左拐，沿与Y轴平行的方向行走时只能向右拐）.易知，李某从家庭住址到上班地点走过的路最短所选择经过的路径共有Cmr1种不同方式.n记Ak表示事件“李某经过端点为(r,k)和(r1,k)的路径数”

Ak所包含的基本事件个数为:从(0,0)点到(r,k)点走过的路径数乘以从(r1,k)点到(mnr1,n)点的路径条数.nkknkCrkCmk 即为 CrkkCmnr1(r1)nk PAkCrkCmkCnmr1knk（k1,2,,n）

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)由Ak的定义知，A0、A1、Ar构成一个完备事件组.r  1PAkk0nPAkk0k0rrCrkCmkCnmr1knk

nkn上式整理得： CrkkCmCmr1 kk0令mn得： Cr0Cr1CrnnCrnn1

n例4 证明组合恒等式 Cnnr1Ci0ninir2

证明 我们构造如下古典概率模型：

设将n张相同的卡片放到r个不同的盒子中，把这一实验结果作为一个向量(x1,x2,,xr)，其中xi表示被分到第i个盒子中的卡片数，于是满足 x1x2xrn()的向量(x1,x2,,xr)的个数。

考虑n张白色卡片与r1张黑色卡片组成的排列，将每一个这样的排列与()式按照下面的方式对应起来：使x1等于排列中第一张黑色卡片左边的白色卡片的张数，x2等于第二张黑色卡片间白色卡片的张数，如此继续到xr，它等于最后一张黑色卡片右边的白色卡片的张数。很容易得到n张白色卡片与r1张黑色卡片的所有排列与方程()的全体解一一对应，由于排列共有

(nr1)!n!(r1)!nCnnr1个，即解也有Cnnr1个，所以得到Cnnr1Ci0ninir2

或者还可以如下：我们很明显看出x1可取0,1,2,,n的n1个值，x2,,xr可以组成一个r1维向量(x2,,xr)

令A0：当x1=0时，(x2,,xr)的解的个数为Cnnrn

2;;

An：当x1=n时，(x2,,xr)的解的个数为Cnnr2

nnCi0ninir2由于 P(Ai)i0Cnr121

n1

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)所以得到 Cnnnr1Ci0ninir2

r例5 证明组合恒等式 CrrmCj0jmj1

1r证明 之前的例子我们证明过这样一个组合恒等式：CnrCnrCn1 1这个需要被证明的组合恒等式实际就是该组合恒等式的推广，于是我们建立如下古典概率模型：

现在将mr张卡片从1进行编号，并从中抽取r张卡片作为一组，用n来表示1,2,,n号都被选出而n1号未被选出的最大值，如1号未被选出那么n0.若1号选上了而2号未被选上，则n1，如此等等，令ni，不同组的卡片数显然等于从编号为i2,i3,,im的卡片中抽出ri张卡片的选法总数。于是

rni的组有Crimri1个，因此总数Crmr满足CrrmrCi0rimri1

我们令jri得 CrrmCj0jmj1

3.3运用等概率法证明组合恒等式

我们从不同的角度解答同一个概率问题，就可以得到同一事件的概率两种不同的表达形式，并且由它们相等来证明组合恒等式。在概率问题中，我们往往不能局限在一种思维，其实可以用多角度的思想去解答，这样也会给证明带来便利。

1nnCn2 例1 证明Cn0Cn证明 这是一个重要的组合恒等式, 这里用概率的思想证明.为此我们构造如下概率模型：

“某人投篮命中率，现独立地重复投篮了n次，问投进的概率是多

21少？”

记事件Ak为投篮n次投进了k次（k1,2,n）, 于是问题是求PA1A2An.由于A1,A2,A3An两两互斥，得

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)PA1A2AnPA

kk1n11 =Cnk22k1nknknk1Cn2nk

又因A1A2An的对立事件是A1A2An，问题可以转化为求1PA1A2An，而  PA1A2AnCn2n0

Cn2n01PA1A2An1

1nnCn2.即Cn0Cn1例2 证明组合恒等式 Cn0CnCnnC2nn

222证明 根据组合式的性质.CnrCnnr, 原式左边可变形为：

CnCnCnCn0n1n1CnCnC2nn0n

两端同除以C2nn，得：

CnCnC2nn0nCnCnC2nnkn1CnCnC2nnn01

我们来观察上面这个式子式的概率意义，可以构造下面的模型：

“一盒子里有2n张卡片，其中n张白色卡片n张红色卡片，今从中任取n张卡片，求至少有一张红色卡片的概率.”

记事件A为抽得的n个球中至少有一张红色卡片；

事件Ai为抽得的n个球中恰有i张红色卡片

则 PAiCnCnCn2nini（i1,2,n）

而 AA1A2An 且 AiAj ij 根据有限可加性，得

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)PAPA1PA2PAn CnCnC2nn1n1CnCnC2nn2n2CnCnC2nnn0

另一方面 A{ 抽得的 n 张卡片都是白色卡片 } 而 PACnCnCn2n0n

CnCnC2nn0n于是

PA1PA1

所以 CnCnCn2n1n1CnCnCn2n2n2CnCnCn2nn01CnCnCn0nn2n CnCnCnCn2001n1CnCnC2n2n01即 Cn0CnCnnC2nn

2m例3 证明组合恒等式 CniCnmiiCnm2m

i0证明 我们构造以下概率模型：

设箱子中有n付大小不同的手套，现在我们随机从中取出m只，计算取出的手套全不配对的概率.把从2n只手套中取出m只不同手套的组合作为样本点，则样本点总数为C2nm.记事件A为取出的m只手套全不配对，接下来计算P(A).方法一 A发生要求m只手套必须取自于不同型号种类的手套，而手套的种类有n种，因而m只手套可有n种可供选取，共有Cnm个选取种数.同时，在每一

1种类型号的手套中又有“左”、“右”两只手套可选择，有C2种取法，这样，取11C（出m只手套共有C2m个）种取法.综合上述，A的基本事件数目为Cnm2m，2则PACnm2m/C2mn.方法二 令Ai取出的m只手套中含有i个“左”只手套，i0,1,m.显然

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)AAi 且 AiAj（ij)则 PAi0mPA.又因为A中的i只“左”

imii0手套可有n种“左”手套可供选取，共有Cni种取法.其余另外的mi只手套全是“右”手套，为了使得取出的m只手套全不配对，那么，这ni只“右”手套只能在剩下的ni种型号的手套所对应的ni“右”手套中选取，共有Cnmii种取法.于是，由乘法原理可得，Ai的基本事件数目为CniCnmii（i0,1,2m）那么

PAiiCimnCni/Cm2n mm由此可得 PAPAimiiCnCni/Cm2n

i0i0综合上述可得组合恒等式:

mCimimnCniCn2m i0n例4 证明组合恒等式 CiniaCbCnabCnb

i1证明 我们构造如下的概率模型：

设一个盒子中有a张黑色卡片，b张白色卡片，我们现在从中随机抽取

(nmin(a,b))张卡片，求所取的卡片中至少有一张黑色卡片的概率。

记事件A为任取的n张卡片中至少有一张黑色卡片；

事件Ai为任取的n张卡片中至少有一张黑色卡片（i1,2,,n）

nn那么A1,A2,,An是互不相容事件并且Ai，则P(Ai)1

i1i1ini而

P(AaCbi)Cn(iC1,2,,n)

abniinCaCnb于是

P(A)P(A)i1in

i1Cab记事件A为任取的n张卡片中没有黑色卡片

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)

n则

P(A)CbCnab

Cbnn那么

P(A)1P(A)1nCab

所以我们得到

Ci1iaCbniCnab1CbCnnab

n整理可得

Ci1iaCbniCabCbnn

第4章 由概率论方法引申出的恒等式证明

4.1 级数恒等式的证明

例 证明级数恒等式 n1n(n1)!1

证明 我们建立如下概率模型：

设有一个盒子，里面装有黑色卡片和白色卡片，设其为事件A，其中白色卡片一张，黑色卡片无数张，则事件A只包含两个基本事件摸出为黑色卡片（设为事件B）和摸出白色卡片（设为事件C）的随机试验，我们进行有放回的随机抽取卡片，并且为独立重复n次试验，则在第k次试验中，B出现的概率P(k)，不出现的概率为Q(k)，则Q(k)1P(k)。

现令T(n)表示在n次独立试验中B首次出现在第n次试验中的概率，于是有T(1)P(1)，T(2)Q(1)P(2)，„„，T(n)Q(1)Q(2)Q(n1)P(n), 令P(N)T(n)，(N)Q(n)，则有P(N)(N)1。

n1n1NN取P(n)nn1，则(N)Q(n)n1NNn1NNN1n1n，N故P(N)(N)T(n)Q(n)n1Nn1n1（n1）!n11n11

由于N，lim1n1Nn10，所以有n1n(n1)!1，齐齐哈尔大学毕业设计(论文)4.2 初等组合恒等式的证明

例

证明下面两个组合恒等式

1(1)CnrCnr1Cnr1

其中n,r,s,N

(2)Cns1Cn1Cn2Cs 其中n,r,s,N sss证明

(1)我们建立如下概率模型：

设一个盒子中装有n张卡片,其中仅有一张红色卡片，现从盒子中取出r张卡片，则有Cnr种取法。于是我们可将这Cnr种取法分为两类：一类是包含红色卡片的，取定了那个红色卡片之外，还需在剩下的n1张卡片中取出r1张卡片来，1共有C11Cnr种取法；另一类是不含红色卡片，应在除去红色卡片后的n1张卡片1中取出r张卡片，因此共有C10Cnr1种取法，并且这两类取法之和即为取法总数，即Cnr种取法。所以有

CnC1Cn1C1Cn1Cn1Cn1，故(1)式得证。

下面证(2)式：

对(2)式作变换：令rs1有

Cns1r1r10rr1rCn1Cn1

s1ss1s再令nn1有

Cn1Cn2Cn2

以此类推…

Cs2Cs1Cs1CsCs1

s1sss把上面的式子左右各相加，化简有 CnCn1Cn2......Cs。

s1s1s1sss(2)式得证。

4.3 级数组合恒等式的证明

例

证明下面的级数组合恒等式

ki0(1)CCimkinCknmki0

(2)CCCiminnnmki0

(3)CnCnii(2n)!(n!)2

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)

0当1rnnkkr(1)C(nk)当rn(4)n!nk0n(n1)n!当rn+12证明

(1)我们构造如下概率模型：

设一个盒子中有n张白色卡片和m张黑色卡片，我们现从中随机地取出k张卡片，考虑取出的k张卡片中有i张白色卡片的事件Ai(i=0，1，„，k)的概率，于是可得

PAiA0,A1，„„，AkkkCmCnCikiknm，i0,1,2k，是互不相容的事件，且这k1个事件之并是必然事件，即UAi，则P(Ai)P()1，i0i0k于是CmCnkikiki0i0Cnm1，即CmCnikiCnm.k(2)令kn，由式(1)可得式(2)；(3)令nm，由式(2)可得式(3)。(4)欲证此等式，首先引入一个引理

引理：设随机事件A1，A2,,An满足

P(Ai)p1,(i1n)

P(Ai1Ai2)p2,(1i1i2n)

P(Ai1Ai2Ai3)p3,(1i1i2i3n)

„„，P(A1A2An)pn，nk1nk1则有P(Ak)(1)k1CnP(k)

（1）

k为了证明本式，我们建立如下概率模型：

从1到n这n个自然数中每次任取一数，有放回地抽取r次，令Ai={取出的r个

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)数均不等于i，i1，2，，n则

pkP(Ai1Ai2Aik)(nk1nk1nknk1),(1i1i2ikn,k1,2n)

nknr则由(1)式P(Ak)(1)Cn(k)，（2）

nr当1rn时，必存在i使得取出的r个数均不等于i，因此Ai是必然事件，于

i1是，由(2)式有

n(1)k1k1C(knnkn\_r)P(Ai)1C，即

(1k)1Cnkn(k)，0

rni10nnk1① 当rn时，Ai={取出的n个数中至少有一个等于i}，i = 1,2,„,n，于是，nAi{取出的n个数均不相同}，由[7]知其概率为i1n!nn，从而有

n!nnni1ni1P(UAi)1P(Ai)1n

kkr(k)n!把上式代入(2)式整理可得

(1)Cnnk0ni1ni1② 当rn1时，则Ai{取出的n1个数恰有两个数相同}，其概率P(Ai)，n于是得出可知 P(Ai)i1n!nnn1Cn1，2n!2P(UA)1P(A)1C从而有

iin1 n1i1i1nnnko代入(2)式整理可得(1)Cn(nk)n!Cn1kkr2n(n1)2n!

③ 当r0时，考虑随机试验：从大于n的自然数中任取一数，令Ai={取出的数大于i}，i =1,„,n，则显然

pkP(Ai1Ai2Aik)1,(1i1i2ikn,k1.2..n)

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)

kk且P(UAi)1C，代入(1)式整理可得(1)Cn0，koi10nnnnko0当1rnnkkr当rn所以有 (1)Cn(nk)n!

k0综上所述，证明完毕。

n(n1)2n!当rn+130

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)

总 结

本文通过概率理论给出了证明组合恒等式的方法，主要应用了概率论中的古典概率，完备事件，互不相容，基本事件总数等相关知识。其主要思想是针对所要证明的组合恒等式构造出适当的概率模型，求出该模型中有关事件的概率。而构造概率模型来证明组合恒等式的基本方法是：首先根据需要被证明的组合恒等式特点建立相对应的概率模型；然后在概率模型中分析思考问题。然后根据概率的一些性质，推出应有的结论。组合恒等式的证明方法有很多，而用概率论的方法来证明组合恒等式不仅提供了组合恒等式的不同证明途径，而且有助于加深我们对概率论基础知识的理解和掌握。

本文主要研究了如何运用概率论的方法证明一些组合恒等式，一共分为三章：

第一章绪论中，简单介绍了概率论方法研究的背景和发展状况，自然引出了需要研究的问题；

第二章主要介绍如何运用概率论的基本理论来证明组合恒等式； 第三章主要介绍如何运用概率理论构造数学模型；来证明组合恒等式； 第四章针对前面的证明方法进行推广证明一些其他的恒等式，以便于更加深刻理解这种用概率理论证明恒等式的好处。

组合恒等式的证明问题通常需要超高的技巧，有意识的积累一些组合恒等式的证明方法是很有益的。特别是运用概率论的方法证明，构造出适当的概率模型加以说明和解释则非常有助于恒等式的记忆，理解与运用。

通过对本文的深入研究，不但使我对于概率论的方法证明组合恒等式有了更深一步了解，而且了解概率论在科学研究和实际生活中的很多应用，这更坚定了我努力研究数学知识并将这些知识应用于生活中的决心。

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)

参考文献

[1] 纪玉卿，祝广大.组合恒等式的概率证法[J].许昌师专学报, 1999，18(5)：84-87 [2] 谭毓澄，张劲松，王玉娟.由一概率问题引出的组合恒等式[J].江西教育学院学报（综合），2024，29(6): 7-8

[3] 田俊忠，魏淑清.恒等式的概率方法证明[J].固原师专学（自然科学版）,1997，18(13): 10-12

[4] 卢开澄,卢华明.组合数学[M].北京：清华大学出版社,2024

[5] 姚仲明.恒等式证明的概率模型法[J].安庆师范学院学报（自然科学版）, 2024,9(4)：37-38

[6] 张太平.用概率思想证明组合恒等式[J].《张太平：用概率思想证明组合恒等式》1999，10(2)：67-70

[7] 潘茂桂.用概率方法证明组合恒等式[J].牡丹江师范学院报(自然科学版).2024，1(2):39-40

[8] 潘茂桂，撒晓婴.用概率方法证明组合恒等式[J].西南民族学院学报（自然科学版），1993，11(4):436-440

[9] 鲍焕明.组合恒等式的概率证明[J].牡丹江师范学院报(自然科学版).2024, 1(2):39-40

[10]Brualdi R A.Introductory combinatorics [M].New York:North-Holland, 1997,1-50.[11]Probablity Theory I 4th Edition [M].New York:Springer-Verlag,1977,189-195.32

齐齐哈尔大学毕业设计(论文)

致 谢

我要感谢我的导师崔继贤老师，他为人随和热情，治学严谨细心。在闲聊中他总是能像知心朋友一样鼓励我，在论文的写作和措辞方面他总会以“专业标准” 严格要求我，从选题定题开始，一直到论文最后的反复修改，润色，崔老师始终认真负责地给与我深刻而细致地指导，帮助我开拓研究思路，热心点拨，热忱鼓励。正是崔老师的无私帮助与热忱鼓励，我的毕业论文才能够得以顺利完成，再次谢谢崔老师。

然后还要感谢大学四年来所有的老师，为我打下数学专业知识的基础，感谢李学院和我的母校——齐齐哈尔大学四年来对我的大力栽培。

最后我要感谢我四年的大学同学，感谢我的家人和那些永远忘不了的朋友，他们的支持与情感，是我永远的财富

**第四篇：银雪军**

八日洛阳暑期实践感想

2024年8月27日中午，我们一行5个人从大学城出发，目标——上海火车站。我们之中很多人都是之前一两天从各自家里坐长途车赶到上海，大家好像还没休息够，就要马不停蹄地离开这座城市，我们下一个目的地是中原古城：洛阳，那里将是我们未来8天暑期实践的大本营。时间的仓促似乎让我们有点来不及做好出发准备，但大家都是出门在外的学子，已经习惯了为出远门做准备，是的，我们都准备好了，带上火车上吃的泡面和水，我们出发了。而一千多公里之外的洛阳，我们的实践团团长刘洋和另外两位成员已在那里，等待我们的到来。

一夜的火车奔行，28日早上七点，我们抵达洛阳火车站，而刘洋已在一个小时之前在此处等候我们。终于见到他了，我们五个人也都暂时打起精神，他为我们安排了住处，我们刚下火车的这几个家伙也可以休息一下了。想到刘洋也是比我们坐车提早一天到这儿，他也没怎么休息，就又要做很多，辛苦他了。从那时开始，我们8个人终于集合到一起了，未来几天我们将以东华大学暑期社会实践团的名义在洛阳开展活动，我们准备好了。是的，洛阳，我们来了。

28日下午，经过短暂休息后，我们要做是第一件事——拜访洛阳市团委。大家来到洛阳市团委，虽然我们一行都是学生，但团委老师给我们的却是热情而亲切的接待。我们将我们未来几日的活动内容、行程告诉老师，她认真了解后，也对我们提出中肯建议。而作为当地人，这位年轻的女老师也像我们的大姐姐那样，对我们在这边的出行、生活等问题提供了一些帮助。

而接下来两天，我们进行了便民小知识、资助政策宣传进社区的活动。我们来到了居民小区，大家搭起了宣传展板，做好准备工作。起初，我们的活动产生一点小误会，看到我们8个人穿着印有“东华大学”的团服和我们宣传资料，小区居民误以为我们是来为学校招生的，不过后来在大家的耐心解释下，居民们也都对我们的活动有了正确的认识。在大家的努力宣传下，小区居民也都积极参与我们的活动，而当地人也热情在活动场地等问题上为我们提供帮助，在他们那一口陌生却亲切的河南方言中，我们感受到了洛阳人的质朴和善良，我们的活动也在平和美好的氛围中顺利进行下去。

第四天，我们一大清早来到洛阳老城区青年宫广场，广场中满是晨练的市民，这正是我们今天宣传活动的绝佳场所，今天我们要做的是：古文物保护宣传，希望我们能为这座13个王朝的古都的文物保护尽自己的绵薄之力。我们在一处摆好了宣传展板，大家统一的着装也吸引了市民们的眼球，而淳朴、善良的洛阳人也热情的参与到我们的活动之中。

八天的活动就在不紧不慢的节奏中结束了，我们的活动也顺利圆满完成。这次暑期实践给予我很多收获，我想我这辈子都不会忘记洛阳这座城市，我会时常想起那里热心、善良的人们，也许有一天，我会回去。再见了，洛阳。

**第五篇：李雪论文**

以《再别康桥》为例浅谈新课标下的朗读教学 【摘要】中学阶段语文课文大多是文质兼美的文章，是供学生朗读的佳作。朗读教学重在培养学生的语感，提高学生与文学作品进行心灵对话的能力，并提高审美能力。语文新课标也强调了朗读教学的重要性，课堂上应该指导学生用普通话正确、流利、有感情地朗读课文。然而，在当今的初中语文教学中，朗读教学成了被很多教师遗忘的角落，严重制约了学生语文素养的提高。作为一名初中语文教师，我在教学实践中对朗读的功能和应用进行了有益的探索和尝试。下面我主要以徐志摩的经典诗歌《再别康桥》为例谈谈朗读教学的重要意义。

【关键词】品读 感悟 审美

自古以来，朗读一直是学好语文的一种行之有效的必不可少的重要手段。语文学科区别于其他学科的特点之一就是书声琅琅。《语文新课程标准》在初中学习目标中提出：能用普通话正确、流利、有感情地朗读课文。目前，在中学语文课堂上，教师留给学生的朗读时间不足，学生没有沉静的品读和感悟，语文也被当作了一门知识性和纯理性的学科来教，削弱了学生对祖国语言的学习和感悟能力。因此，如何更加适应新课程标准及新的教学理念，更新教学方法，以激发学生学习语文的兴趣，则成了每一个初中语文教师必须考虑的问题。

正如语文特级教师，全国中语会学术委员洪镇涛老师所说：‚学习语言，要把‘读’作为开启语言宝库的钥匙。‛有道是‚三分文章七分读‛，‚读书百遍，其义自现‛。读出声气,读出节奏，读出思想，读出情感，读出形象，读出神采，读出韵味。读，是语文课的第一教学法。朗读，视之于眼，诵之于口，闻之于耳，形成于脑，整个过程调动了诸多因素，形式多样的‚读‛贯穿整个语文课堂教学，能极大地激发学生学习语文的兴趣，可以开启学生想象的空间，并逐步形成潜在的兴趣，能很好地培养学生的整体感知能力、欣赏能力、表达能力等。在此，笔者不揣浅陋，愿将自己的具体做法写出来，以求抛砖引玉。

一、以质疑导自读，培养学生的整体感知能力

初中语文教材所选文章多为典范作品，文质兼美，很值得品读一番。作为教师就不应越俎代庖，喧宾夺主，而应充分抓住学生的好奇心理，把学习的主动性交还给学生，引导学生通过自读去主体感知文章。自读的方式学生可根据自己的爱好选择默读或自己小声读。那么如何才能取得好的效果呢？那就‚以教师为主导，学生为主体‛，教师可以根据教学的重点，质疑导向，质疑定标。‚疑，思之始，学之端。‛宋代学者陆九渊曾说过：‚为学患无疑，疑则有进，小疑小进，大疑大进。‛故学生在学习中没有问题就没有兴趣，没有思维，没有创新。有些学生在朗读课文时不抓重点、疑点，几遍下来，仍不知其所云。教学中，运用质疑的方法，激发学生浓厚的学习兴趣，促使其积极思考，认真读书，达到导读的目的。如可以借助投影出示根据课文的重、难点设臵的问题，激发学生学习课文的直接兴趣，唤起学生的阅读欲望，学生自己读课文便有了目标，提高了阅读的速度与质量。在教学中，我引导学生应用两步法阅读，具体步骤是：第一遍默读，重在速读。即不查字音，不分层次，快速浏览全文，把握文章主旨。第二遍自由读，重在细读。即根据老师出示的问题，就联系上下文，自己探究，自己质疑。教是为了不教，语文课的任务不仅是教给学生知识，更重要是培养学生能力，使学生由‚学会‛变为‚会学‛。因此我们要重视培养学生选择重点的、最喜欢的段落、句子，有质疑地自己读。《再别康桥》美不胜收，是语文老师津津乐教的篇目。可教学的内容丰富，这就需要教师有所选择，选择具有生长点的教学内容。我理解的生长点就是学生通过学习能使自己的语文能力得到提升，语文素养有所积淀，同时学会审美方法。

二、以情境带范读，激发学生的诵读欲望

如果说自读训练了学生的整体感知能力，那么教师的范读，则起了激发学生诵读欲望，尤其是教师在创设情境的基础上的声情并茂、绘声绘色的范读, 能使学生很快进入角色，激发学生的朗读兴趣和表现欲。教师应以身作则，范读，必不可少。17世纪捷克著名的教育家夸美纽斯早有论断：‚真正的教育不在于口训，而在于实行。‛又说：‚教师的职责是用自己的榜样教育学生‛。更何况语文是一门具有浓厚人文气息和情感色彩的学科，这种特点决定了它的教学，必需要创设一种氛围，设臵某种情境；必需要借助教师或铿锵有力，或婉转缠绵，或回旋往复，或一泻千里的语言，将学生带入美的体验之中，让他们愉悦地感受、美好的联想，从而获得性灵的陶冶、思想的升华。苏霍姆林斯基说得好：‚没有一条富有诗意的感情和审美的清泉，就不可能有学生审美能力的发展。‛因此要想让学生变成审美的主体，教师就要成为审美的导师。教师有声有色的朗读，会加深学生对课文的印象，作品中的优美、准确、富有表现力的语言尤其使学生着迷，范读传达着教师本人的态度，范读时的鲜明的爱憎，强烈地影响着学生想去模仿，想自己表现，激发着学生强烈的诵读欲望，使他们的思想感情和教师发生共鸣。

诗是感性的，诗是不可解读的，而诵读诗歌是学习诗歌的重要方法。我们不妨把教学聚焦在朗诵诗歌上，在朗诵的过程中体会诗歌的美。基于此，在讲授《再别康桥》时我们可以完全从诵读入手，但是这个诵读不是基本的朗读，我们要通过读，教会学生诵读现代诗歌的技巧。如基本的断句，音节的把握，节奏的调控等。在把握朗诵基调时，对于诗歌情感的定位要依据对诗歌主题的理解，这就需要穿插对诗歌背景的介绍，同时引导学生学会在鉴赏诗歌时有‚我‛的存在，也就是多元解读。下面我想把我的以读代讲的想法和大家分享。

朗读与朗诵是有区别的，我们通常为了教学方便让学生都是读作品，底线就是声音洪亮吐字清晰，而朗诵则是用清晰、响亮的声音，结合各种语言手段来完善地表达作品思想感情的一种语言艺术。诗歌是经典的文学作品样式，我们必须让学生学会朗诵，在朗诵中加深对作品的感悟。

三、以方法导诵读，培养学生的理解能力、表达能力

自读是为了整体感知文章的内容，但仅是粗读而已；范读是为了激发学生赏读课文，但仅是辅助而已，唯有学生的诵读才是最重要的。朱熹说：‚大抵观书先须熟读，使其言皆若出于吾之口，继以精思，使其意皆若出于吾之心，然后可以有得尔。‛故初中语文课堂要给足充分的时间给学生朗读，让学生展现自我，抒发性情，让学生成为学习的主体。我始终认为，一节语文课，如果自始至终都听不到学生的读书声，那不算是真正的语文课。

为能准确指导学生朗读、点燃学生的朗读兴趣，激发学生的朗读感情，促进学生的朗读训练，教师可以借助于丰富多彩的朗读方式，如齐读、单读、一个接一个读、对读、分角色读、赛读、录音朗读、表演朗读等等。同时教师要精心地指导学生朗读，科学地进行朗读教学，教给学生朗读的方法。苏霍姆林斯基认为：‚教给方法比教给知识更重要。‛只有教予学生朗读的方法，指导学生读出意，读出味，读出情，才能使学生在反复诵读中加深对文章的理解，培养学生对语言的敏锐感受力，让学生终身受益。叶圣陶先生把有感情的朗读叫做‚美读‛，‚设身处地，激昂处还他个激昂，委婉处还他个委婉……美读得其法，作者胸有境，入境始于亲。‛然而真正能读出感情来并不容易，需在朗读技巧作必要的适当的指导。当然，朗读的要领、技巧是很多的，教师要能准确地朗读并指导学生朗读课文，能读好停顿、重音、轻读、拖音、语调，并且掌握好速度、富有节奏感，就需要善于在实际践中不断探索、总结。教师要精心选择朗读训练点，每次训练有个侧重点，锤锤敲打，锤锤有声。学生反复练读，用心体会，感悟到这样读，‚大珠小珠落玉盘‛，叮当有声，错落有致，读出了语言的韵味，读出了语言的音乐美。学生一旦掌握朗读技巧，学会朗读的方法后，将举一反三，极大地提高朗读教学质量。由此看来，朗读不仅不会耽误时间，反而会提高阅读的效率，很大程度上提高了学生的理解能力、表达能力，达到事半功倍的效果。由读到诵经历以下几个环节：

初读至意读（扫清障碍，感知内容，把握节奏）——意读至情读（体悟文意，揣摩思想，确定情感基调）——情读至美读（技巧点拨——发声方法，声音的处理方式，表情的配合，音乐融合等）

朱光潜先生在《给一位写新诗的青年朋友》一文中说道‚一首诗到了手，我不求甚解，先把它朗诵一遍，看它读起来是否有一种与众不同的声音节奏。如果音节很坚实饱满，我断定它后面一定有点有价值的东西……‛。所以初读到熟读的过程就是在体会诗歌的节奏。节奏是一切艺术的灵魂，诗的节奏是语言的节奏也是音乐的节奏。语言的节奏与发音器官有关，更受对作品的理解和表达的情感的影响。

在指导学生熟读《再别康桥》时，学生应了解诗歌的背景资料，引导学生发现它的韵脚，体会它的音节的和谐，断句的规律等。《再别康桥》全诗共七节，每节四行，每行两顿或三顿，韵式上二、四押韵，抑扬顿挫，朗朗上口。优美的节奏如康河的柔波荡漾。如果只是朗读就不会享受到诗歌自身的绝美境界。这就需要教师讲解朗诵技巧，如音调的高低、音量的大小、声音的强弱、速度的快慢，有对比、有起伏、有变化等，让学生感受诗歌犹如一曲优美的乐章。

四、以再读悟真情，升华学生的审美情趣

在教师的指导下诵读提高了学生的理解能力、表达能力，而其后的反复涵咏、再次诵读升华了学生的审美情趣。古希腊学者普罗塔戈说过：‚头脑不是一个要被填满的容器，而是一束要被点燃的火把。‛每一篇课文总有它的精湛之处，在师生理解课文的基础上，最后选择最精彩的部分段落或语句，让学生再次反复诵读，自悟出真情，实现情有所感，理有所谓。这样，点燃学生学习的激情，丰润学生的精神生活，纯洁学生的心灵，升华学生的审美情趣。再读，把书面语言转化为发音规范的有声语言，使学生加深了对作品思想的理解，使学生的感情与作者发生共鸣。朱熹认为‚凡读书……不可牵强暗记，只是要多诵读数遍，自然上口，永久不忘。‛（《训学斋规》）学生的再读经过老师的指导，具有声情并茂的节奏，和谐婉转的韵律。这样，学生能悟出作品的声音美、神韵美、情感美，潜移默化中学生的语感得到了很好的培养。再读，像一位出色的导游，把诵读者引入神奇美妙的境界，界情随声出，其声琅琅，其乐融融，达到这种炉火纯青的境界，何乐而不为？

在美读的过程中，结合自己对于诗歌主题的理解，选取契合的音乐，合适的音乐可以让我们充分体会诗歌的节奏，使诗歌的文字在优美的音乐中流淌让,同时让音乐帮助自己传达对于诗歌主题的理解。我为《再别康桥》的朗诵选择了小提琴曲《爱的致意》

综上所述，自读→范读→诵读→再读，在导中读，在读中悟，以‚读‛来贯穿整个语文教学，便是我教学的特点。‚教学有方，教无定方‛，这并不可能是唯一最佳的教法，但我以为无论哪种教法，都应以学生为根本，以激发主体潜能为目的。我想，只有这样的教法，才能让学生在生动活泼的自主学习中得到能力的培养。在推进新课程的大好时光中，让我们一起努力，让我们的语文学习多一些朗读，还语文课以美丽、动人的容颜，让汉语丰厚优美的语言之花在学生的心田上绚烂开放！

本DOCX文档由 www.zciku.com/中词库网 生成，海量范文文档任你选，，为你的工作锦上添花,祝你一臂之力！