# 大学生数学建模竞赛试题A

来源：网络 作者：夜幕降临 更新时间：2025-06-22

*第一篇：大学生数学建模竞赛试题A2014桂电大学生数学建模竞赛试题A题 计划生育新政对我国人口数量、结构及其经济的影响研究李克强总理代表国务院在2024年政府工作报告中指出：“坚持计划生育基本国策不动摇，落实一方是独生子女的夫妇可生育两个...*

**第一篇：大学生数学建模竞赛试题A**

2025桂电大学生数学建模竞赛试题

A题 计划生育新政对我国人口数量、结构

及其经济的影响研究

李克强总理代表国务院在2025年政府工作报告中指出：“坚持计划生育基本国策不动摇，落实一方是独生子女的夫妇可生育两个孩子政策。”

人口的数量和结构是影响经济社会发展的重要因素。从20世纪70年代后期以来，我国鼓励晚婚晚育，提倡一对夫妻生育一个孩子。该政策实施30多年来，有效地控制了我国人口的过快增长，对经济发展和人民生活的改善做出了积极的贡献。但另一方面，其负面影响也开始显现。如小学招生人数（1995年以来）、高校报名人数（2025年以来）逐年下降，劳动人口绝对数量开始步入下降通道，人口抚养比的“拐点”时刻即将到来。这些问题都会对我国的经济和社会健康、可持续发展等产生一系列影响。

为此，根据要求回答下列问题：

1.请你们就我国（或广西区）上世纪50年代至今人口和经济的变化做出简要分析。

2.建立关于生育率、死亡率和性别比等多个因素的人口数学模型，分析计划生育新政策（单独二孩政策）对我国（或广西区）未来人口数量，结构及经济的影响（注：可到网上收集一些相关的文献和数据，建立数学模型）；并对模型的结论发表自己的独立见解。

参考文献及数据来源：

1.2025年政府工作报告。

2.姜启源，谢金星.数学模型.北京：高等教育出版社.2025.162-166.3.第六次全国人口普查数据（2025年）4.国家年度数据

**第二篇：数学建模竞赛试题**

A题：中国人口老龄化问题

目前，中国已进入人口老龄化社会，而且老龄化趋势越来越明显。众所周知，人口老龄化是个重大问题，它涉及到经济、政治、文化和社会的各个领域，关系到国计民生和国家的长治久安。为此，国内外许多人口专家都提出了一些应对人口老龄化的方法，如调整生育政策、延长退休年龄以及完善社会化养老体系等。（1）收集有关数据，给出我国人口老龄化现状的统计结果；

（2）试建立模型，预测在目前政策体系下，我国未来30年人口老龄化的变化趋势；

（3）结合我国实际，给出应对我国人口老龄化的具体方案，并预测该方案的效果。

B题：动态生产问题

某化肥厂生产一种复合肥料，根据销售部门的预测，下一市场的月需求量如下表（单位：千吨）:

月份 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 在生产过程中，由于停机后再启动的费用很高，故我们假定生产是连续的。生产出来的化肥除满足当月供货外，剩下的可以存储起来供以后用。现厂房有一个容量为5千吨的仓库可供使用。因为仓库是厂方的，可以不考虑存储费用。生产过程中可以每月或者若干月调整一次生产量以满足市场需求。由于生产工艺原因，如果从某月开始增加产量，每吨化肥要增加成本10元，如果减少产量，则每吨要增加成本5元。考虑到再下一的市场需求，要求年底有2千吨的库存。根据以上条件，编制一个下一的生产计划，要求因产量变化引起的成本增加总额最少，同时又保证有足够的库存来满足各月份的销售要求。又假如存储需要费用，每吨每月的存储费为6元，对上面的最优生产计划有影响吗？

**第三篇：数学建模及大学生数学建模竞赛**

数学建模及大学生数学建模竞赛

近几十年来，随着科学技术的进步，特别是电子计算机的诞生和不断完善，数学的应用已不再局限于物理学等传统领域，生态学、环境科学、医学、经济学、信息科学、社会科学及一些交叉学科都提出大量有待解决的实际研究课题。要用定量分析的方法解决这些实际问题，十分关键而又十分困难的一步就是要建立恰当的数学模型。建立数学模型的过程需要把错综复杂的实际问题抽象为简单合理的数学结构，要做到这一点，既需要丰富的想象力，又需要去寻找较合适的数学工具，从某种意义上讲，它是能力与知识的综合运用。

一、什么是数学建模

数学建模（Mathematical Modeling）简单地说就是建立数学模型的过程。

二、数学建模的起源

数学建模并不是新东西（尽管过去很长时间这一术语用得很少），可以说有了数学并要用数学去解决实际问题就一定要用数学的语言、方法去近似地刻划实际问题，而这种刻划的数学表述就是一个数学模型，其过程就数学建模过程。

三、数学建模的教学与数学素质的培养

众所周知人才培养是关键，数学模型方法已成为科学技术中常用的非常重要的方法，它是数学和其他科学技术之间的媒介和桥梁。同时数学建模的研究有了长足的进步，又有得心应手、强有力的计算机作为工具，因而必然会有人考虑到数学教育中一个不可缺少的内容应该是数学建模等数学的应用的内容。数学建模教学要求对学生以下几个方面的能力进行培养。

四、大学生数学建模竞赛

我国在高校中开设数学建模课程始于1982年，但当时只有少数重点院校作为选修课程来开设，可以说是自发的、民间，因而数学建模课程并未受到人们的重视。数学建模课程真正被许多高校融入主干课程，被国家教委、国家教育部重视，却是得益于大学生数学建模竞赛。可以说数学建模竞赛是目前我国设立的最成功的一项竞赛，它促进了各高校数学建模教学和数学建模活动的逢勃发展。

**第四篇：大学生数学建模竞赛承诺书**

西北民族大学研究生数学建模竞赛承诺书

我们仔细阅读了西北民族大学研究生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的, 如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们参赛选择的题号是（从A/B/C中选择一项填写）：

我们的参赛论文题目是：

参赛队员（打印）：

队员1姓名：；联系电话：；邮箱：；

学院：；专业年级：；

队员2姓名：；联系电话：；邮箱：；

学院：；专业年级：；

队员3姓名：；联系电话：；邮箱：；

学院：；专业年级：；

参赛队员签名：1； 2；3。

日期：年月日

编号：（由竞赛委员会填写）

**第五篇：2025全国大学生数学建模竞赛**

嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略

摘要

随着月球探测任务的发展,未来月球探测考察目标将主要是 复杂地形特性的高科学价值区域。为了能够安全地在这些遍布岩石、的区域内完成高精度软着陆，这就要求导航和控制系统具有较强的自主性和实时性。本文针对最终着陆段安全、精确的需求，对月球软着陆导航与控制方法进行较深入研究，主要内容包括：

首先，提出一种基于单帧图像信息的障碍检测方法。该方法根据着陆区内障碍成像的特点，通过匹配相应的阴影区与光照区完成对岩石、弹坑的检测，利用图像灰度方差对粗糙区域进行提取：在检测出故障信息的基础上，选取安全着陆点以保证软着陆任务的成功。

其次，给出一种基于矢量观测信息的自主光学导航方法。该方法利用光学相机和激光测距仪测量值构建着陆点相对着陆器的矢量信息，结合着陆器的姿态信息确定着陆器的位置。为了消除测量噪声带来的干扰，利用扩展Kalman滤波理论设计了导航滤波器。

再次，提出一种李雅普诺夫函数障碍规避制导方法。该方法通过对状态函数、危险地形势函数的设计，以满足平移过程中减低障碍威胁与精确定点着陆器，设计PWPF（调频调宽）调节器实现定推理等效变推力控制效果。

最后，针对采用变推力主发动机的月球着陆器，提出一种垂直软着陆控制方法。该方法采用标称控制与闭环控制相结合的方式，规划标称轨迹以保证着陆器到达着陆点时其下降速度、加速度亦为零，设计闭环控制器产生附加控制量消除初始偏差、着陆器质量变化的干扰，以保证着陆器沿标称轨迹到达着陆点。

本文分别对所提出的最终着陆段导航与控制方法进行数学仿真以验证个方法的可行性。仿真结果表明，本文多给出导航方法能够达到较高的性能指标，满足在危险区域实现高精度软着陆的需要。

关键词： 月球软着陆；自主导航与控制；障碍检测；规避制导；适量测量

一、问题重述

嫦娥三号于2025年12月2日1时30分成功发射，12月6日抵达月球轨道。根据计划，嫦娥三号将在北京时间12月14号在月球表面实施软着陆。嫦娥三号如何实现软着陆以及能否成功成为外界关注焦点。嫦娥三号在着陆准备轨道上的运行质量为2.4t，其安装在下部的主减速发动机是目前中国航天器上最大推力的发动机，能够产生1500N到7500N的可调节推力，进而对嫦娥三号实现精准控制。其比冲（即单位质量的推进剂产生的推力）为2940m/s，可以满足调整速度的控制要求。在四周安装有姿态调整发动机，在给定主减速发动机的推力方向后，能够自动通过多个发动机的脉冲组合实现各种姿态的调整控制。嫦娥三号的预定着陆点为19.51W，44.12N，海拔为-2641m。嫦娥三号将在近月点15公里处以抛物线下降，相对速度从每秒1.7公里逐渐降为零。整个过程大概需要十几分钟的时间。在距月面100米处时，嫦娥三号要进行短暂的悬停，扫描月面地形，避开障碍物，寻找着陆点。之后，嫦娥三号在反推火箭的作用下继续慢慢下降，直到离月面4米高时再度悬停。此时，关掉反冲发动机，探测器自由下落。

嫦娥三号在高速飞行的情况下，要保证准确地在月球预定区域内实现软着陆，关键问题是着陆轨道与控制策略的设计。其着陆轨道设计的基本要求：着陆准备轨道为近月点15km，远月点100km的椭圆形轨道；着陆轨道为从近月点至着陆点，其软着陆过程共分为6个阶段，分别为着陆准备轨道、主减速段、快速调整段、粗避障段、精避障段、缓速下降阶段，要求满足每个阶段在关键点所处的状态；尽量减少软着陆过程的燃料消耗。

根据上述的基本要求，请你们建立数学模型解决下面的问题：

（1）确定着陆准备轨道近月点和远月点的位置，以及嫦娥三号相应速度的大小与方向。（2）确定嫦娥三号的着陆轨道和在6个阶段的最优控制策略。

（3）对于你们设计的着陆轨道和控制策略做相应的误差分析和敏感性分析。

二、问题分析

对于问题一：

嫦娥三号从15公里左右的高度下降到月球表面，在这一过程中不考虑月球表面太阳风的影响，忽略月球的自转速度引起的科氏力的影响，由于下降时间比较短也不考虑太阳、地球对嫦娥三号的摄动影响，嫦娥三号水平速度要从1.692km/s降为0m/s由于3000m处时嫦娥三号已经基本位于着陆点上方，所以此时假设在3000m处的速度只存在竖直向下的速度而不存在水平分速度，因为降落减速时间比较短只有垂直于月面的方向运动才能实现，所以在确定着陆点位置和着陆轨迹时应当考虑燃料最优情况下推力最大，方向自由的方法即取F7500N建立主减速段动力学模型。

三、符号说明

四、模型假设

对于问题一：

忽略月球的自传和太阳、地球对嫦娥三号卫星的引力摄动 月球近似为一个质量均匀的标准球体 将嫦娥三号是为一个质点

主减速忽略动作调整所产生的燃料消耗段不考虑太阳风的影响

五、模型建立与求解

5.1问题一的建模与求解 解法一： 假设嫦娥三号在t时刻在远月点开始缓慢下降，在n时刻到达近月点，整个过程遵循开普勒第三定律，即

v00

在t时刻有：v12R1 R0R0R1r0 R0r1r2 其中v1：远月点速度

v2：近月点速度

R0：远月点月心距

R1：近月点月心距（已知月球的半径为1738千米）

R017381001838km

R11738151753km 在t1时刻处v2 k2R1 R0R0R1R00.512k0.488 R0R1利用能量平衡式求得近地点速度为

20.51249012（）1.692km/s（沿切线方向）v2，比当地的环境速度17531.672km/s大vk0.0196km/s，径向速度vk0。

1同理解得v11.6139km/s（沿切线方向）

vri0

解得主减速段动力学模型的建立：

根据题意，在横向飞行的水平距离远远小于月球半径的平均值，所以可以将整个减速段过程简化为水平和竖直方向运动方程，根据牛顿第二定律、速度计算公式有：

axTx maytTymTxta

1.692km/s m0Qdt0Tyadt57m/s t0mQdt0tT22xTy27500N

v22atS

运用matlab编程解得S451810.4m； 其中 ax：水平方向加速度

ay：竖直方面加速度

a：月球表面重力加速度a Tx：推力的水平方向分力

Ty：推力的竖直方向分力

t:主减速段时间

S:嫦娥三号主减速段水平位移

Q:嫦娥三号发动机燃料秒消耗率

根据已知资料得到嫦娥三号着陆过程中纬度改变，经度基本不变，月球赤纬和地球纬度一样也分为南北各90个分度,又因为月球极区半径为1735.843km，所以每一个纬度的竖直高度差为19.2871

4g 6千米。即近月点位置坐标为19.0464W,28.9989N海拔15km,远月点位置坐标为160.9536E,28.9989S海拔100km。

解法2:轨迹方程法。

众所周知,太阳系中的八大行星都在按照各自的椭圆轨道绕太阳进行公转,太阳位于椭圆的一个焦点上,行星的运动遵循开普勒三定律,笔者发现,在各类物理竞赛中,常会涉及到天体运动速度的计算,本文拟从能量和行星运动的轨迹方程两个不同的角度来探索行星在近日点和远日点的速度。

该解法的指导思想是对椭圆的轨迹方程求导,并结合一般曲线的曲率半径通式求出近日点和远日点的曲率半径表达式,然后利用万有引力提供向心力列方程求解。如图1所示,椭圆的轨迹方程为

x2y221 5 2ba将5式变形为

a2x2b2y2a2b2 6

根据隐函数的求导法则将6式对x求导有

2a2x2b2yy0 7 即

a2xy2 8

by将7式再次对x求导得

2a22b2(yyyy)0 9 将8、9两式联立得

a2b2y2a4x2 10 y-43by根据曲率半径公式有 r(1y)11 y122 将8、10、11式联立并将A点坐标A(0，a)代入可得A点的曲率半径为

b2RA 12

a根据椭圆的对称性,远日点B的曲率半径为

b2RBRA 13

a 由于在A、B两点行星运行速度方向与万有引力方向垂直,万有引力只改变速度方向,并不改变速度大小,故分别根据万有引力提供向心力得

GMmmvA 14 (ac)2RAGMmmvB 15 2(ac)RB将13至15式联立可得 22vAbGMbGM，vB acaaca

5.2问题二的建模与求解 模型一：动力学模型

典型的月球软着陆任务中,探测器一般首先发射到100km的环月停泊轨道,然后根据所选定的着陆位置,在合适的时间给着陆器一个有限脉冲,使得着陆器转入近月点(在着落位置附近)为15km,远月点为100km的月球椭圆轨道,这一阶段称为霍曼转移段。当着陆器运行到近月点时,制动发动机开始工作,其主要任务是抵消着陆器的初始动能和势能,使着陆器接触地面时,相对月面速度为零,即实现所谓的软着陆,这一阶段称为动力下降段。着陆器的大部分燃料都是消耗在此阶段,所以月球软着陆轨迹优化主要是针对动力下降段这一阶段。由于月球表面附近没有大气,所以在飞行器的动力学模型中没有大气阻力项。而且从15km左右的轨道高度软着陆到月球表面的时间比较短,一般在几百秒的范围内,所以诸如月球引力非球项、日月引力摄动等影响因素均可忽略不计,所以这一过程可以在二体模型下描述。其示意图如图1所示,其中o为月球质心,x轴方向为由月心指向着陆器的初始位置,y轴方向为初始位置着陆器速度方向。

图 1 月球软着陆极坐标系

其动力学方程如下: rv 

v(F/m)sin/rr

22 ((F/m)cos2v)/r

mF/ISP

在上式中r为着陆器与月心距离,v为着陆器径向速度,为着陆器极角,为着陆器极角角速度,为月球引力常数,F着陆器制动发动机推力,m为着陆器质量,为制动发动机推力方向角,其定义为F与当地水平方向夹角,ISP为制动发动机比冲。根据动力下降段的起点位置可以确定动力学方程初始条件,由于起点处于霍曼转移轨道的近地点,故其初始条件为: r0rp

00

v00 01rprp(2ra)rarp其中rp和ra分别为霍曼转移段的近地点半径和远地点半径。

终端条件为实现软着陆, 即

rfR

vf0

f0

其中R为月球半径,终端条件中对终端极角f及终端时间tf无约束。

优化变量为制动发动机推力方向角(t)。

优化的性能指标为在满足上述初始条件和终端条件的前提下, 使着陆过程中燃料消耗最少,即

Jm(t)dt

t0f设计主减速段制导控制律 2动力下降段燃料最优精确着陆问题描述 2.1 燃料最优精确着陆问题

着陆器运动方程：考虑采用变推力发动机情况，有

rv

.vga

(1)

aTmmaT..其中r[rhrxry]T，v[vhvxvy]T分别表示着陆器相对期望着陆点的位置和速度矢量；T为推力器提供的推力矢量，幅值为 T，对应控制加速度矢量 a；g为火星的重力加速度矢量，此处认为是常值；m为着陆器质量，对应推力器质量排除系数。指标函数：考虑燃料消耗

min(m0mf)min0fTdt

(2)边界条件：即初始条件和终端条件

r(0)r0,v(0)v0,m(0)m0,r(tf)v(tf)[000]

(3)控制约束：考虑发动机一旦启动不能关闭，存在最大和最小推力约束

0T1TT

2(4)状态约束：为避免在着陆前撞击到火星地表，需确保整个下降段位于火星地平面以上，即

rh0

（5）进一步地，若着陆区域附近表面崎岖不平，仅仅确保地表约束不能满足需求时，可以考虑下降倾角约束，即将着陆器下降轨线约束到以着陆点为顶点的圆锥体内

2.2 等效后燃料最优精确着陆问题 定义等效变换变量

Ttrx2ry2rhtanalt

（6）

uaT

m

（7）

Tmzlnm等效着陆器运动方程： .r0I3..

yv00.00z其中p[uT0r0vI030z07\*70ug0AcyBc(pg4)

（8）],g4[gTT0]T

t指标函数：

min0f(t)dt

（9）

边界条件：同式(3)。

控制约束：由文献[10]可知，控制约束(4)可等效表示为

u1T1ez0[1(zz0)(zz0)2]T2ez0[1(zz0)]

（10）（11）

2状态约束：地表约束同式(5)，倾角约束(6)可等效表示为

T

Sycy0

（12）

其中

0100000S

0010000ctanalt

T000000

3.燃料最优精确着陆问题的离散化及变换 3.1 等效燃料最优精确着陆问题的离散化

首先将整个飞行时间均分成 n 段（对应 n +1 个点），每段步长为t，离散化后的着陆器运动方程为：yk1AykB(pkg4)

其中AR77,BR74分别为离散系统的系统矩阵和输入矩阵

12AetAcI3tActAc

2tt112BetsAcBcdsesAcdsBctBctBct2Bc

0026其中I3为三阶单位阵。

有系统性质可知，整个控制时域内系统状态满足 y3Ay2Bp2g4A3y0A2Bp0g4ABp1g4Bp2g4ynAyn1Bpn1g4Any0An1Bp0g4ABpn2g4Bpn1g4y1Ay0Bp0g4y2Ay1Bp1g4A2y0ABp0g4Bpn2g4Bp1g4

为表达方便，令

y0p00A0yp1111A ,pp2，2A2 Yy2nyn7n11pn4n11nA7n1700B1AB223ABn1An则(15)可等价于

000B012ABBB0002 ABB003AABB0n1AABBA2BABBn7n14n1000000Yy0pg4

分别定义如下常值矩阵：

最终可得离散化后的燃料最优化问题如下： 指标函数：式(9)可表示为

边界条件：式(3)可表示为

控制约束：式(10)和式(11)分别可表示为

状态约束：式(5)和式(12)分别可表示为

含有 p个线性约束和 q个二阶锥约束的最优化问题的标准形式为 指标函数

min(Tx)满足约束

DTxf0AxcibdinTiTi

（k=1,，n）

n\*pp其中xR为待优化向量，R，线性约束参数DR,fR，二阶锥约束参数维数n(Ai,bi,ci,di)由相应约束确定

则式(17)～式(23)可最终转换为如下最优化问题： 指标函数：min(vpp)满足：

初值约束:MxΨ0pMx(Ψ0y0)A0g4r0末值约束:MxΨ0pMx(Ψ0y0)A0g4控制约束:Murkpvrkp 控制上限:(vzΨkTTTTv0T0

0

T1vr)p1vTz(Φky0Akg4)z0,z0 z0kT2e 控制下限：

4数值仿真结果与分析本节以某火星着陆器为例，计算了典型初始条件下满足各种约束的燃料最优精确着陆轨迹。其中探测器各参数分别取为：m02000kg,g[3.711400]ms2,c2kms,T11.3kN,T213kN.。着陆器初始位置矢量r0= [1500,-600, 800] m，初始速度矢量v0= [-30, 10, 40]m/s，倾角alt=86°。二阶锥优化问题可以通过大量免费的优化工具求解，如 CSDP、DSDP、OpenOpt、SeDuMi、SDPA、SDPLR等。本文选用 SDPT3 进行计算，通过执行线性搜索确定燃料最优下降时间tf为 43s，图 1 给出了相应的最优着陆轨迹、下降速度、加速度、控制推力、推力幅值以及探测器质量变化曲线。

由优化结果可以看出，探测器在给定时间飞行并软着陆到指定位置，且在整个下降过程始终与火星地表保持一定的安全距离，验证了下降倾角约束的有效性。其推力幅值曲线呈现“最大-最小-最大”的最优控制形式，不过为了保持发动机始终处于点火状态，在中间段对应最小推力约束，这与文献中的分析结论一致。此外，通过利用如 TOMLAB 等商业最优控制软件进行复核计算，也验证了此计算结果的燃料最优性能。

\*

图 1 给定初始条件下火星着陆器动力下降段燃料最优计算结果

需要注意到，此燃料最优轨迹的获取对着陆器的实时在线计算性能提出了较高的要求，经测试，无论使用何种优化工具，计算给定飞行任务时间的最优轨迹均需数秒，而全局最优则需要数十秒甚至更长，这在实际任务中是不允许的。因此，可行的方案是通过在地面计算大量的燃料最优轨迹，并寻找规律，选取关键路径点状态存储到着陆器计算机中，通过在线查表或者在利用对计算量要求较小的反馈制导律完成安全着陆任务。

因此，为了研究探测器燃料最优轨迹特性，选取相同的探测器参数，暂不考虑推力器最小幅值约束和倾斜角约束（但考虑地表约束），固定初始高度为 1500m，初始位置水平方向从-8000m 到 8000m 内取值，分别选取各种不同的初始速度，可得燃料最优精确着陆轨迹簇如图 2 所示。

图 2 各种不同初始速度对应的火星着陆器动力下降段燃料最优轨迹簇

1)对任意探测器初始位置，特定初始速度对应的燃料最优着陆轨迹在末端必然收敛到一个固定的近似圆锥体内。

2)取决于探测器初始位置和速度的关系，燃料最优轨迹有两种形式：S 型和 C 型，其中 S 型主要对应于期望着陆点位置水平距离较大情况。3)当探测器初始水平速度为零时，圆锥体轴线垂直于火星地表，所有最优轨线关于该轴线中心对称。4)初始速度的大小也直接影响到任务的可靠性，因此需要在超声速进入段和降落伞减速段将着陆器速度下降到合理范围内。

上述结论对上注探测器关键点的选取有着较强的指导意义，比如基于最优轨线的斜率对路径点合并、基于最优轨线簇的对称性对上注轨线进行等效延伸、或者尝试仅将 S 型和 C 型的转折点作为路径点等，这样可以大大降低探测器自主存储与计算需求，进而有效提升任务的可靠性。重力转弯软着陆过程

对于最终着陆点，假设探测器的下降轨迹在一平面内，且月球引力场为垂直于月面XY的均匀引力场，引力加速度g沿-Z，如图1所示，制动推力方向沿探测器的本体轴z。重力转弯软着陆过程中探测器质心动力学方程可表示为

上式中各变量的物理意义如图1中所示，其中m>0为探测器质量；k>0为制动发动机比冲；u表示制动发动机的秒耗量

可通过一定的机构加以调节，故作为软着陆问题的控制变量。假定制动发动机的最大推力与初始质量比大于月面引力加速度，并且制动推进系统能够在一定的初始条件下将探测器停止月面上。

重力转弯过程中，探测器的高度、速度和姿态角度可由雷达高度表、多普勒雷达及惯性仪表测得。令软着陆初始条件探测器到达月面时速度减小到给定的值，故终端条件自由。软着陆燃耗最优问题的描述 对于最终着陆段，可假设

为一小角度。由此可将系统方程（1）化简为

要设计制导律实现软着陆，就是使

着陆时间

对于月球软着陆的燃耗最优控制问题，其性能指标可表示为

对于系统（2）的软着陆过程，燃耗最优问题等价于着陆时间最优问题，性能指标为

在月球重力转弯软着陆过程中，如果存在一个推力控制程序将探测器从初始条件转移到终端条件，并使性能指标（3）或（4）式最大，则称这个推力程序为软着陆燃耗最优或时间最优制导律。根据pontryagin极大值原理，系统的哈密顿函数及其对u的偏导数为

使哈密顿函数（5）式达到极大地控制输入u就是最优控制，科表示为。

如果存在一个有限区间

则最优控制u（t）取值不能由哈密顿函数确定。此时如果最优解存在，则称为奇异解，（8）式称为奇异条件。

最优制导问题的性质：1）对于自治系统（2）的时间最优控制问题，沿最优轨迹其哈密顿函数满足

将其对时间求导并将（2c）和（6c）式代入，得

另外，由于自由，根据横截条件有3）根据（6a）式。又由（9）式可得T（t）=0，4）根据极大值原理，系统的状态变量和共轭变量都是时间的连续可微函数，将切换函数对时间求导，利用（2），（6）式和性质2）得 软着陆最优控制中奇异条件的分析

对于月球重力转弯软着陆问题，最优制导律具有两个很好的性质。

定理一。月球重力转弯软着陆系统（2）的燃耗最优制导或时间最优制导问题不存在奇异条件。证明。用反证法，假设存在奇异条件，则在某个闭区间设，并由（5）式得

。根据反正假将（10）式两边对时间求导，并将（2）和（6）式代入化简得性质2），并考虑到或者情形1.得

下面证明这两种情形均与反证假设矛盾。根据式

及性质2）可知，由性质3）必有

根据

是时间t的斜率非零的线性函数，m和情形2.1）若定，根据横截条件有在区间内为常数。这与反证假设矛盾。

。下面再分三种情况进行分析。

又因为

不与此时由（6b）式有反证假设矛盾。2）若盾。3），与反证假设矛又

因

为

因此有成立，这与

此时（10）式在上根据定理一，重力转弯软着陆的最优制导律是一种开关（Bang-Bang）控制，只须控制发动机开关，不需要调节推力的大小。

定理2.对于月球重力转弯软着陆过程，其开关控制器的最优推力程序（7）最多进行一次切换。

证明。只要证明最多只在一个时间点成立即可。软着陆系统（2）在最优推力控制程序（7）的作用下，按最后轨迹降落。由性质3）知，为常数。根据性质4），若严格单调，因而在上至多有一个零点，即至多进行一次切换；若，则上为常数。由定理1，5 软着陆最优开关制导律

不可能在任何区间上成立，故必有既没有切换点。

对于最优推力控制程序（7），其切换函数中含有共轭变量，它是一个关于状态变量的稳式表达式。为实现实时制导，需求出关于状态变量的切换函数来。

根据定理一和定理二，重力转弯软着陆最优控制程序没有奇异值状态，并且在着陆过程中最多切换一次，其工作方式有4种：1）全开；2）全关；3）先开有关；4）先关后开。对于方式1）软着陆起始点即是开机点；方式2），3）不能实现软着陆；最后一种是通常情况下的最优着陆方式，即探测器先做无制动下降，然后打开发动机软着陆到月面。设开机时刻为到发动机工作时间为

式，在区间

内积分，并考虑

将（11）式中的对数按泰勒展开，忽略

并令

消掉T得到切换函数为

由切换函数（12）式可以看出，速度、位置的误差和制动发动机推动的将直接影响着陆的效果。一种方法是将终端高度从到达月面时实现软着陆设置为离月面还有几米时实现软着陆。另一种方法是考虑制动过程由一个主发动机和一组小推力发动机共同完成，通过调整开启的小发动机的数量，来实现变推力降落。具体地，令切换函数为

式中各符号的含义如图2所示

关机点可取为2m,可取为20m，可取为1m/s。为实现着陆的最优性，减速度

取为

其中T如（12）式中所示，m0为探测器的初始质量。

图三为最优着陆过程与其改进方法按图2降落的次优着陆过程的对比图。由此图中可看出，改进方法提高了着陆的安全性，当探测器的初始质量mo=350kg，发动机着陆过程多消耗燃料2.2kg。

时，改进方法比最优

（a）

（b）

问题三 协方差分析方法的基本原理 对于如下非线性函数关系

yfx1,x2xn（1）

可以使用一阶泰勒级数展开对其进行线性化，有

yyfffx1xnx1xn（2）x1xn其中，x1xn为x1xn的高阶项。从而得到线性化方程

yfxi（3）i1xin或表示为

YPX(4)

这里 P 是偏导数矩阵: Pif（5）xi若自变量x1xn是随机变量，则线性化方程的函数y的协方差矩阵为：

EYYTEPXXTPTPEXXTPT(6)即 CyPCXPT(7)式中Cx是自变量的协方差矩阵；Cy是函数Y的协方差矩阵。

协方差矩阵中对角线元素是方差，非对角线元素为协方差。显然，只要求出传递矩阵 P ,便可确定源误差与欲求量误差之间的关系。若给定各种源误差，如发动机安装误差、敏感器测量误差或发动机推力和点火时间等误差时，便可以分析其对目标轨道误差的影响以及对控制系统精度的影响，进一步对各系统及元部件提出适当的精度要求。计算向月飞行轨道误差的协方差迭代方程

考虑到轨道参数的误差之相对于轨道参数的标称值是小量，因此可以将轨道运动方程进行线性化，从而得到能够反映轨道参数偏差量的传播关系的误差方程。在应用双二体模型且在地球影响球范围内时，对轨道运动产生摄动影响的各项，如月球引力摄动、太阳引力摄动、大气阻力摄动和太阳光压摄动等对误差方程的影响很小，因此在误差方程中将它们忽略掉。反映轨道位置和速度误差的线性化方程如下：

vrg（8）vrrTur，其中u为地球引力常数。式中 gr3rrrx2ry2rz2（9）

写成状态方程形式：

0Irr(10)vG0vg式中 GT

r0Ir令FG0,Xv（11）

则式（9）变为

FX(12)X下面推导矩阵 F 的表达式：

guGTT3rrrruurrT33Trrrruuuur3333I3rrrrryzrxr（13）

式中 r x，r y 和 r z 是探测器在地心惯性坐标系里的轨道位置坐标。则Gu3T(Irr)(14)332rrrx2rxryrxT2rrryrxryrzryrxryrrzrxrzryzrxrzryrz（15）2rz

将式（15）、（14）代入（10），得： 0002-urx(132)Fr3r3urxryr5v3urxrzr5

积分式（11），得到： 0003urxryr520003urxrzr53urzryr5210000ry-u(13)32rr3urzryr5-urz(13)0r3r200100100（16）

0000

XteFtX0

（17）式中

(Ft)2(Ft)3(Ft)4(Ft)neIFt2!3!4!n!

（18）iNtFi.()i!i0Ft取前 6 阶截断，即：

eFttiFi!

（19）i06i

得到计算误差方程的迭代方程：

XtiteFtXti

（20）

eFt相当于式（4）中的 P 阵，由于误差方程是时变方程，因此每一步迭代都需要重新计算 P 阵，计算 P 阵需要利用标称轨道参数数据。

进一步根据式（7），得到协方差矩阵的迭代方程：

T

Ci1PCPiii

（21）向月飞行轨道误差的协方差分析

引起轨道误差的误差源主要是导航误差，包括位 置 误 差 和 速 度 误 差。其 中 ： 位 置 误 差 ：rrx,ry,rz,rx,ry,rz分别为在地心惯性坐标系中 X 轴、Y 轴、Z 轴的分量。速度误差：vvx,vy,vz,vx,vy,vz分别是在地心惯性坐标系 X 轴、Y 轴、Z 轴的分量。向月飞行轨道的初始轨道位置和速度误差由运载火箭的发射入轨精度决定，若探测器在飞行途中进行轨道修正，则经过轨道修正以后的轨道位置误差将由导航误差决定，速度误差将由姿态误差和制导误差决定。

上述误差决定了轨道误差协方差分析的计算初始条件，表 1 给出了在不进行中途轨道修正情况下，在地心惯性坐标系里，初始轨道位置误差和初始速度误差对轨道终点的位置和速度误差的影响。图 1 和图 2 给出了在算例三中探测器从近地轨道入轨点开始至进入月球轨道为止轨道位置的相应的轨道位置和速度总误差（3σ）的时间历程。

表 1 初始轨道位置和速度误差

对轨道终点误差的影响

图 1 轨道位置总误差时间历程（3σ）

图 2 速度总误差时间历程（3σ）基于敏感系数矩阵的制导误差分析

在月球软着陆主制动段，影响制导精度的误差源主要有偏离标准飞行轨迹的初始条件误差和导航与控制传感器误差。初始条件误差由主制动段以前的任务决定，传感器误差则由导航系统和传感器本身决定。此外，影响制导精度的因素还包括月球自转、月球不规则摄动等误差，对它们的研究可单独进行，这里暂不做介绍。2.1 误差模型建立

2.1.1 初始状态误差模型

记着陆器的实际初始状态为Xi，标准初始状态为Xn,则定义初始状态偏差xi为

xiXiXn

(7)对于主制动段这一特定的飞行过程，这些偏差都是确定的；而针对整个月球探测任务，这些偏差就变得具有随机性。在本文中，假定xi 的所有元素均服从零均值高斯分布，相互不独立，其相关性取决于前一阶段任务的特性。2.1.2 传感器误差模型

由于只研究误差对制导律的影响，所以这里假设需要测量的量均可由导航系统直接测得，误差大小

均考虑为典型误差值。由上一目设计的制导律可以看出，需要由导航与控制传感器测量的量主要为着陆器相对于着陆场坐标系的位置、速度和加速度。定义待测量量Q为

QX其估计值记为Q，则传感器误差定义为 YZUVWA

T

qQQ

(8)那么，单个测量量的估计误差模型可用误差向量 q的第j(j =1，2„7)个元素qj 来表示。由参考文献[5]可知，第 j个观测量的总估计误差qj 由以下四部分组成

~~-~qjbsqjnstqtqQtqtQjt

(9)jjbcjnc

j100100~~~~~针对主制动这一特定操作阶段，上述四部分误差具有如下特性：

qjbc—第 j 个观测量的测量误差，恒为常值，其分布服从零均值高斯分布； qjbs—第 j 个观测量的刻度因素误差系数，恒为常值，其分布服从零均值高斯分布； qjnc—第 j 个观测量的随机误差，其为一高斯白噪声；

qjns

—第 j 个观测量的刻度因素随机误差系数，其为一高斯白噪声。

2.2 制导误差分析

由于采用闭环制导，制导控制系统对随机误差具有一定鲁棒性，所以本文将着重对初始偏差和类似于qjbc和qjbs这样的传感器常值误差进行仿真研究，分析它们对制导精度的影响。2.2.1 误差分析系统建立

误差分析系统框图如图 1 所示，下面将对其结构进行分析。~~~~~~

图 1 误差分析系统结构图

图中所示初始状态偏差实际上是加在相应积分器中。

由前面的分析可知，观测量的实际输出值受到初始状态偏差、传感器测量误差以及传感器刻度因素误差的影响，故误差分析系统模拟程序的实际输入应包含以下几部分(以 X通道为例)：

XXxixbc~xbsX

(10)100~~

其中，X为观测量的实际输出值，X 为标准值，xi 为初始状态偏差(只在初始时刻存在)，xbc 为传感器测量偏差，xbs为传感器刻度因素误差系数。由图 1 可以看出，为了更准确地表示传感器误差模型，这里考虑了传感器的动态性能，其传递函数设为一阶惯性环节11Ts，其中，T 为传感器时间常数，因传感器的不同而取不同值。

由误差分析系统结构框图可以看出，其输入量主要包括：标准初始状态向量、初始状态偏差、传感器测量误差、传感器刻度因素误差系数、传感器时间常数、期望终端状态；输出量为加入误差前后的仿真终端状态向量。2.2.2 误差敏感系数矩阵求取

在有形如(7)式误差输入的情况下，首先根据图 1 生成一个模拟整个闭环制导控制系统的数字仿真程序，然后运行该程序，对比程序输出即可得到误差敏感系数矩阵。具体运行过程如下：

第一步：将传感器误差设置为零，初始状态设置为标准值，运行模拟程序。这一步称为标准运行。第二步： 将其中一个传感器误差设置为非零输入或者设置一个非标准初始状态，然后进行一系列运行。

第三步： 将第二步运行的系统输出和标准运行的系统输出进行比较即可确定各误差源的影响。如X 通道标准初始偏差为xi，输入该误差前后，X 通道终端状态分别为X0 和X1，则 X 通道对标准初始偏差xi的敏感性可用(X1X0)/xi来反映。

通过这种方法，可得到一组反映月球软着陆主制动段终端总误差向量pf和两个传感器误差向量~~~qbc、qbs以及初始状态偏差向量pi之间关系的误差敏感系数矩阵。由参考文献[6]可知，其相互关系可表示为

~~pfS1piS2qbcS3qbs（11）

其中，S1、S2和S3分别表示相对于pi、qbc和qbs的误差敏感系数矩阵。

终端误差向量能用这种形式表示的假设条件是动力学的线性化必须在标准轨迹区域内。验证该假设条件的方法有两种： 扩大输入误差仿真法和复合仿真法，这里略去其验证过程。2.2.3 误差分析

假设导航系统采用常规惯性测量单元，表 1 列出了其典型误差值，其中，位置误差能保持在10数量级，速度在10数量级，加速度为 10g 数量级。1-52~~

运用上述方法得到的敏感系数矩阵给出如下：

5.50210-3-4-3.850101.69210-3S1-38.36210-5.86010-4-3-2.57510-2.08010-4-1.05010-31.41810-11.40110-57.30110-5-1.00110-26.41110-53.24010-4-4.40710-2-2.57010-4-1.86210-3-5.58010-11.41010-57.90210-51.31210-55.71010-4-1.15710-38.10010-53.93610-21.73210-2-2.7431017.74610-1-4.02410-2-8.93910-23.21010-34.03010-31.23910-21.83310-2-2-18.742101.41410-1.19610-2-9.90110-3-2-2-2.69010-4.57710-6.81210-1-8.69510-2-5.2031002.11010-14.23510-16.17010-3-3.2811008.20210-2-5.76010-35.63310-1-3.4891022.4431014.401102-9.8331026.86410123.02010-9.85910-1-1.15410-3-40-3.13010-1.00010-1.37910-33.56010-4S2-2-3-5.402101.540101.04510-31.86410-3-34.77010-44.598109.99910-13.408100-7.21010-43.5041005.00010-55.64310-3-1.52710-19.36810-1-6.72110-1-1.30610-1-5.6314100-28.479103.73010-1S30-8.924104.61910-102.03310-5.49410-1-3.53310-1-2.8101001.60010-31.69210-16.75510-18.99610-1-202510-12.47310-21.66410-1-1.0271007.16510-23.344100-1.1121008.61310-17.8521003.246100-1.6181003.54010-14.98210-17.67010-1-1.122100-2.397100-2.38010-1-3.650100-2.5631002.55610-1-4.29110-23.401100-1.88810-1-5.103100-3.23010-13.56610-12.25610-10-1-7.005109.93010A1、A3:12.7592,30.1297j2.1329 A2:11.5522,30.6761j1.8978

由于数值仿真的起始点选为(1，0，-1)，靠近平衡点(1.5，0，-1.05)，仿真实验中混沌系统的基频w0=2.1329，基周期为为T0202.9443S。由前面的数值仿真实验知要使 Chua’s混沌系统保持其类随机性，仿真步长选在(0.0001，0.7)较为合适，用基周期来表达即为129940T015T0 ,15T0内，综观三个连续混沌系统仿真步长的理论计算，我们可以统一选取15000T0这样即可以提高仿真运算速度，又可以使混沌吸引子的形状和类随机性不发生变化，这个选择范围也与通常连续混沌系统数值仿真步长的经验取值相吻合六、模型结果及分析

七、结果分析

八、模型评价与改进方向

九、参考文献

本DOCX文档由 www.zciku.com/中词库网 生成，海量范文文档任你选，，为你的工作锦上添花,祝你一臂之力！